MANUALI HOEPLI

I GRUPPI CONTINUI
DI TRASFORMAZIONI.

(PARTE GENERALE DELLA TEORIA)

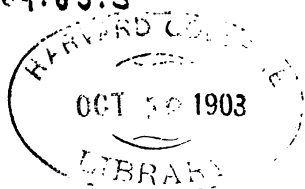
PER

ERNESTO PASCAL

Professore ordinario nella R. Università di Pavia,
Membro effettivo del R. Istituto Lombardo,
Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei,
Membro dell' Accademia Reale delle scienze di Praga,
Socio corrispondente della Pontaniana di Napoli, ecc.

nulla dies sine linea...

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO

1903.

PREFAZIONE.

Una delle più eleganti teorie della moderna Analisi Matematica è quella dei gruppi continui di trasformazioni, dovuta al genio di Sophus Lie, *e che è importante non solo in sè, ma per le sue applicazioni a numerose altre parti dell' Analisi e della Geometria, fra le quali porta inaspettatamente una luce nuova, e fa intravedere legami e nessi non apparsi prima.*

Questa teoria, pur di data così recente, si è andata meravigliosamente e rapidamente sviluppando e ha preso presto un cotal posto fra le sue consorelle, che oggidì un qualunque giovine che percorra gli studii di matematiche superiori, non può più non conoscerla, almeno nei suoi fondamenti e principii.

Senonchè i numerosi volumi che il Lie, *insieme ai suoi discepoli, pubblicò su essa, rappresentano una miniera troppo vasta perchè un principiante, nei suoi primi studii, possa in essa facilmente orientarsi, ed è perciò che a molti è*

sempre sembrato desiderabile un libro che, senza venir meno al rigore e alla generalità, contenga in poco volume tutto ciò che forma le basi di questa elevata parte delle Matematiche pure.

Sono naturalmente ben lontano dal credere che l'opera che oggi presento al pubblico matematico soddisfi interamente questo desiderio spesse volte manifestato da varie parti; essa è da considerarsi piuttosto come un tentativo, e sarò ben lieto se una penna più dotta della mia vorrà contentare gli studiosi meglio di quel che io abbia saputo fare.

Questo volume, che ha avuto origine dal corso di Analisi Superiore che tenni all' Università di Pavia nell'anno 1900-01, contiene solo una parte di quel corso, avendo creduto conveniente, per varie ragioni, di limitarlo alla sola parte generale della teoria dei gruppi, e di tralasciare per ora quanto si riferisce ai gruppi speciali e, in particolar modo, a quelli delle trasformazioni di contatto, argomenti già di per sè considerevoli e che potranno largamente dar materia ad un secondo volume.

Avendo io poi, nell'ultimo anno, condotto a termine qualche ricerca riguardante specialmente le dimostrazioni dei teoremi fondamentali, detti di Lie, *ricerca di cui l'occasione mi venne proprio dall'occuparmi della stampa di questo volume,*

non ho creduto pertanto inutile riprodurre nel testo, e in alcune note messe in fine, qualcuna delle considerazioni che sono andato a questo proposito svolgendo.

E dedicando ora il mio lavoro ai giovani studiosi, esprimo l'augurio che esso possa contribuire, sia anche in minima parte, al progresso dei loro studii. *

Milano, settembre, 1902.

ERNESTO PASCAL.

---

* Sento l'obbligo di ringraziare pubblicamente il distinto mio discepolo Dott. ATTILIO CREPAS per l'aiuto prestatomi durante la preparazione del manoscritto.

INDICE.

CAPITOLO PRIMO.

TEORIA GENERALE DEI GRUPPI DI TRASFORMAZIONI.

CAPITOLO II.

TEORIA GENERALE DELL'INVARIANTIVITÀ RISPETTO AD UN GRUPPO DI TRASFORMAZIONI.

CAPITOLO III.

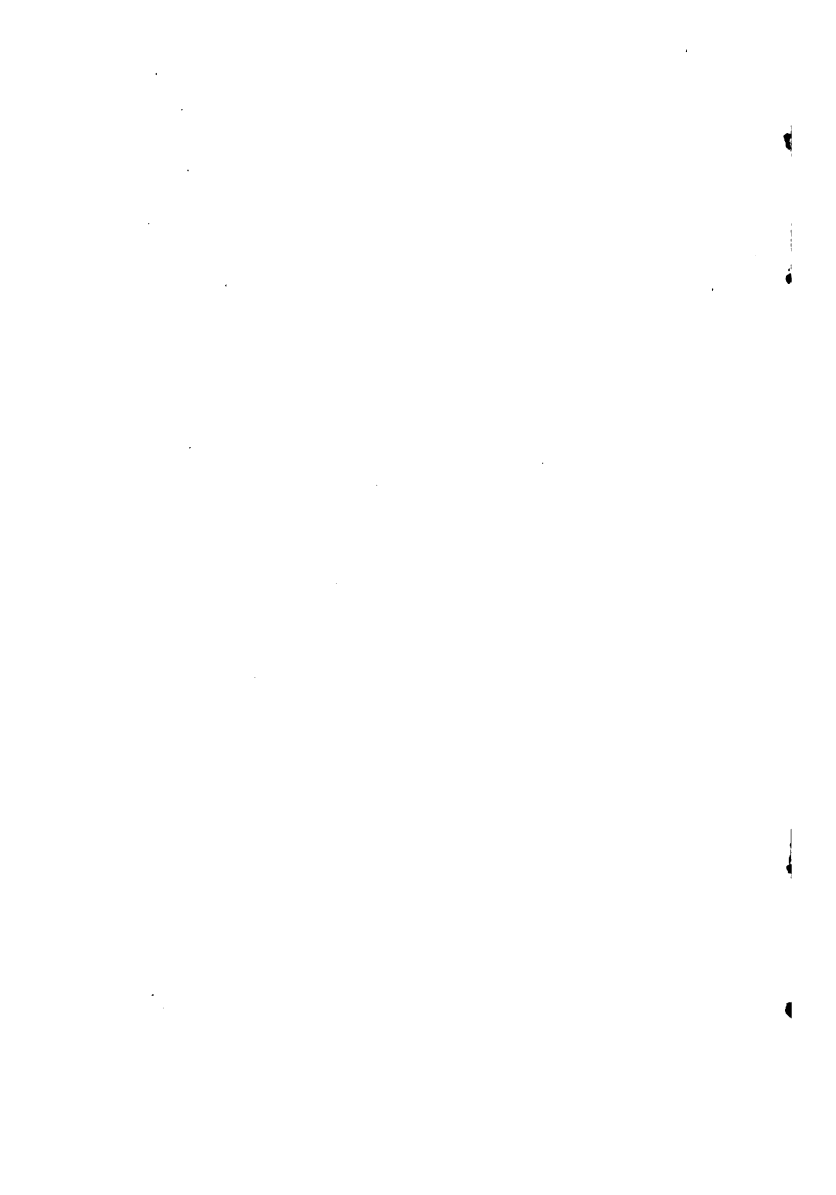
PROPRIETÀ RELATIVE ALLA COSTITUZIONE DEI GRUPPI.

CAPITOLO IV.

GRUPPI AGGREGATI AD UN DATO.

CAPITOLO V.

TEORIA INVARIANTIVA DEI GRUPPI AMPLIATI.

NOTE ED AGGIUNTE.

CAPITOLO PRIMO.

Teoria generale dei gruppi di trasformazioni.

§ 1. — Preliminari. Concetto di trasformazione. Parametri della trasformazione e condizioni perchè essi sieno essenziali. Esempi.

Sieno n variabili $x'_1 \dots x'_n$ date come funzioni di altre n variabili $x_1 \dots x_n$:

$$x'_i = f_i (x \dots x_n), \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

e le funzioni f sieno risolubili rispetto alle x; si dice che queste equazioni determinano una *trasformazione* fra le variabili x ed x'.

Si intende che le funzioni f sieno delle funzioni analitiche, monodrome, definite per tutto un certo campo (x) di variabilità reale o complessa, delle $x_1 \dots x_n$, il qual campo potrebbe, *in particolare*, essere anche il campo totale costituito da *tutti* i possibili valori reali o complessi delle suddette variabili.

Ammettiamo che le formole assegnate sieno tali che per due *diversi* sistemi di valori delle

x, si abbiano sempre due *diversi* sistemi di valori delle x'.

Ammettiamo inoltre che le funzioni f sieno *regolari* nell'intorno di ciascun punto $x^0{}_1\, x^0{}_2 \dots x^0{}_n$ del campo in cui sono definite, cioè a dire che esse in quell'intorno sieno sviluppabili in serie di potenze intere, positive delle differenze:

$$x_1 - x_1{}^0, \quad x_2 - x_2{}^0, \dots$$

Avendo ammesso che le f sieno funzioni risolubili rispetto alle x, fra le quali naturalmente non ammettiamo sussistere alcuna relazione, ne viene che il determinante funzionale di esse rispetto alle x deve avere un valore finito diverso da zero nel campo di variabilità delle x stesse, e allora esisterà un campo di variabilità delle x', nel quale le x possono considerarsi funzioni delle x', e tali che il loro determinante funzionale sia anche diverso da zero.

La trasformazione data dalle formole che rappresentano le suddette funzioni inverse, cioè dalle formole che danno le x espresse mediante le x', si dice *trasformazione inversa* della data.

Due serie di variabili:

$$x_1 \; . \; . \; . \; x_n$$

$$y_1 \; . \; . \; . \; y_n$$

le quali devono essere assoggettate alla medesima trasformazione, si sogliono chiamare *variabili congredienti.*

Supponiamo data una trasformazione:

$$S) \qquad x'_i = f_i(x)^*, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

e pensiamola operata su di una certa funzione delle x, la quale, mediante essa, diventerà una funzione delle x'; immaginiamo ora che su queste nuove variabili così introdotte si operi una nuova trasformazione:

$$S') \qquad x''_i = \varphi_i(x')$$

la quale faccia passare dalle x' ad n altre variabili x''; la supposta funzione sarà ridotta a contenere le x''; ora si domanda: con quale trasformazione fra le x e le x'' si sarebbe ottenuto il medesimo risultato? Evidentemente per trovare tale trasformazione basterà eliminare le x' fra le precedenti formole, e si troverà così:

$$x''_i = \varphi_i\,[f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)] = \psi_i(x).$$

Naturalmente per potere eseguire gli indicati calcoli, bisognerà fare delle ipotesi sui campi di variabilità delle x e delle x'; bisognerà cioè supporre che le x' che compaiono in S, possano avere gli stessi valori che le x' che compaiono in S', o in altri termini, che le x' debbano poter essere prese nel campo (x). Ammetteremo quindi che nel campo (x), si possa assumere un altro campo $((x))$

---

* Per brevità di scrittura scriveremo spesso $f_i(x)$ in luogo di $f_i(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

tale che per ogni sistema di x prese in esso, le x' cadano nel campo (x).

Le precedenti formole rappresentano dunque quella trasformazione fra le x e le x'', che produce lo stesso effetto dell'applicazione successiva delle due trasformazioni S e poi S'; tale trasformazione la chiameremo, per un'ovvia ragione, trasformazione *prodotto* delle due, e la indicheremo col simbolo $S' S$, intendendo esplicitamente con questa scrittura che si operi *prima* la S e *poi* la S'.

Se si operasse prima la S' e poi la S, allora si otterrebbe la trasformazione $S S'$, e per avere di questa le formole, bisognerebbe scrivere la S e S' sotto le forme (mutando i nomi delle variabili):

$$S) \qquad x''_i = f_i\,(x')$$

$$S') \qquad x'_i = \varphi_i\,(x),$$

e così si otterrebbe:

$$x''_i = f_i\,[\varphi_1\,(x), \ldots \varphi_n\,(x)] = \chi_i\,(x).$$

È evidente che in generale le funzioni χ non sono le medesime delle funzioni ψ, il che significa che, in generale, il prodotto $S S'$ non rappresenta la medesima trasformazione che il prodotto $S' S$; quando però si verifica in particolare che:

$$S' S \equiv S S'$$

allora si dice che le trasformazioni S e S' sono *permutabili.*

Ciò che abbiamo detto per il prodotto di *due* trasformazioni non offre alcuna difficoltà ad es-

sere esteso per il prodotto di *più* trasformazioni; ed è evidente, da quanto si è detto, che il prodotto così definito *non è indipendente dall'ordine dei fattori;* le trasformazioni cioè non soddisfano in generale alla così detta *proprietà commutativa.*

La trasformazione specialissima:

$$x'_i = x_i$$

si chiama trasformazione *identica;* essa non fa che mutar nome alle variabili; si suole indicare col simbolo 1.

Moltiplicando una trasformazione per la propria inversa evidentemente deve ottenersi la trasformazione identica; perciò la trasformazione inversa di una data S, si indica col simbolo S^{-1}; così facendo si ha infatti l'identità $S\,S^{-1} = 1 = S^{-1}\,S$, donde può ricavarsi che: *ogni trasformazione è permutabile con la propria inversa.*

Da ciò che si è detto, risulta che il calcolo del prodotto di due o più trasformazioni, si riduce, in ogni caso, ad un procedimento di eliminazione fra le formole di esse; propriamente se abbiamo più trasformazioni $S, S', S'' \dots S^{(k)}$, scrivendo le formole della prima nelle variabili:

$$x_1^{(k+1)} \dots x_n^{(k+1)} \quad \text{e} \quad x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)},$$

quelle della seconda nelle variabili:

$$x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}, \quad \text{e} \quad x_1^{(k-1)} \dots x_n^{(k-1)},$$

quelle dell'ultima nelle variabili:

$$x'_1 \ldots x'_n \quad \text{e} \quad x_1 \ldots x_n\,,$$

eseguire il prodotto di tutte le trasformazioni nell'ordine $S\,S' \ldots S^{(k)}$ (cioè intendendo che si operi prima $S^{(k)}$, poi $S^{(k-1)}, \ldots$ ecc.), significa eliminare fra tutte le formole le variabili:

$$x_1^{(k)} \ldots x_n^{(k)}, \ldots x'_1 \ldots x'_n\,,$$

e dedurre quindi delle relazioni semplicemente fra $x_1^{(k+1)} \ldots x_n^{(k+1)}$ e $x_1 \ldots x_n$.

Ora di qui appare la cosidetta *proprietà associativa* delle trasformazioni, che cioè, purchè non si alteri l'ordine di successione delle singole S, si può sostituire a due o più di esse successive il loro prodotto, o in altri termini che:

$$S\,S' \ldots S^{(k)} = (S\,S')\,S'' \ldots S^{(k)} =$$
$$= S\,(S'\,S'') \ldots S^{(k)} = \ldots \text{ ecc.}$$

Questa proprietà appare a colpo d'occhio, tenendo presente il suindicato processo di eliminazione, giacchè il risultato di questa sarà evidentemente sempre il medesimo, se elimino prima un certo gruppo di variabili, poi un altro, e così di seguito.

Sia ora data una trasformazione:

$$x'_i = f_i\,(x_1\,x_2 \ldots x_n\,;\; a_1\,a_2 \ldots a_r), \quad (i = 1, \ldots n) \quad (1)$$

in cui sieno messi in vista i parametri $a_1\, a_2 \ldots a_r$, che figurano nelle funzioni f. Assegnati dei valori determinati a questi parametri, resta determinata una speciale trasformazione; ammettiamo inoltre che le f sieno funzioni analitiche regolari, definite in un certo campo, sia rispetto alle variabili x che ai parametri a; tali campi li indichiámo, come sopra, rispettivamente con (x) e (a).

La prima questione che si presenta, è la seguente:

È chiaro, in primo luogo, che variando le a (le quali sono in generale *complesse*) in tutti i modi possibili si hanno in generale o ∞^{2r} ovvero $\infty^{2(r-\nu)}$ trasformazioni diverse; il secondo caso si verifica quando i parametri a sono contenuti nelle f in maniera da raggrupparsi in $r - \nu$ funzioni:

$$A_1, \; A_2, \ldots A_{r-\nu}$$

delle a stesse, in modo che le f risultino funzioni delle a per mezzo delle A; in tal caso è evidente infatti che la totalità delle trasformazioni è $\infty^{2(r-\nu)}$, perchè esse vengono a differenziarsi fra di loro non per la diversità dei valori delle a, ma per quella delle A. Quando invece questo caso non si verifica, ovverossia quando $\nu = 0$, allora la totalità delle trasformazioni è ∞^{2r}, ed allora si dice che i parametri $a_1 \ldots a_r$ entrano nella f *essenzialmente*, cioè che sono *essenziali*. Ora si può chiedere:

A quali condizioni devono soddisfare le f perchè i parametri sieno essenziali?

Supponiamo che esistano le funzioni $A_1, \ldots A_{r-\nu}$, dove ν sia maggiore di zero e consideriamo una

funzione generica φ delle a ed il determinante funzionale:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{r-\nu+1}} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial A_1}{\partial a_{r-\nu+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_1} \cdots \dfrac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_{r-\nu+1}} \end{vmatrix}$$

delle φ, $A_1, \ldots A_{r-\nu}$ rispetto ad $r - \nu + 1$ delle a, scelte arbitrariamente (nel determinante soprascritto abbiamo per semplicità scelte in particolare le prime $r - \nu + 1$ delle a). Il precedente determinante eguagliato a zero rappresenta un'equazione a derivate parziali, lineare, omogenea, di primo ordine, in cui la funzione incognita è φ, della forma:

$$\sum_{k=1}^{r-\nu+1} \alpha_k (a_1 \ldots a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0, \tag{2}$$

la quale può considerarsi caso speciale di un'equazione del tipo più generale:

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k (a_1 \ldots a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0, \tag{3}$$

ed è evidente che a quella equazione soddisfano gli integrali:

$$\varphi = A_1, \quad \varphi = A_2, \ldots \varphi = A_{r-\nu}.$$

Ora poichè una funzione qualunque delle funzioni $A_1, \ldots A_{r-\nu}$, soddisferà necessariamente anche alla stessa equazione, come è facile riconoscere,* e poichè le f sono appunto funzioni delle A, per ipotesi, ne risulta che anche le f soddisfano all'equazione precedente. Ma di equazioni come la (2) ne possiamo formare varie, perchè ciascuna di esse risulta scegliendo un certo gruppo di $r - \nu + 1$ parametri a, e quindi esisteranno tante equazioni (2), tutte del tipo generale (3), quanti sono siffatti gruppi possibili; possiamo perciò affermare che, se i parametri $a_1 \ldots a_r$ non sono essenziali, certamente le funzioni f dovranno soddisfare ad un certo numero (almeno una) di equazioni a derivate parziali del tipo (3).

Supponiamo reciprocamente che le f soddisfino ad una equazione della precedente forma (3), la quale, come si sa, dalla teoria delle equazioni a derivate parziali, non può possedere più di $r - 1$

* In effetti data una funzione $\Phi(A_1 \ldots A_{r-\nu})$, le sue derivate rispetto alle a sono date dalle formole:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial a_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{r-\nu}}\frac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{r-\nu+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial a_{r-\nu+1}} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{r-\nu}}\frac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_{r-\nu+1}}.$$

Ora moltiplicando la prima per α_1, la seconda per α_2, ecc. e sommando, e osservando che la somma di tutti i termini situati in colonna nel secondo membro risulta zero, resta dimostrato l'assunto.

integrali indipendenti, * e questi sieno $\varphi_1 \dots \varphi_{r-1}$, funzioni tutti delle a.

Essendo per ipotesi le f anche integrali, saranno funzioni delle $\varphi_1 \dots \varphi_{r-1}$, e quindi le a, le quali compaiono nelle f per mezzo delle φ, che sono in numero minore di r, non sono essenziali.

Risulta dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè i parametri a sieno essenziali nelle formole (1), *è che le funzioni f non soddisfino a nessuna equazione del tipo:*

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k (a_1 \dots a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0. \tag{4}$$

Si presenterebbe ora qui la questione: date le funzioni $f_1, \dots f_n$, quale sarebbe il procedimento pratico per verificare se in esse i parametri sono essenziali o no?

Si formino le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial a_k}$, e si costruiscano le equazioni del tipo (4), immaginandovi in esse le α indeterminate; la questione si riduce a vedere se da tali equazioni lineari, omogenee nelle α, si possano ricavare i valori di queste, e che sieno solamente funzioni delle a. Per ciò fare, si può tenere il seguente procedimento:

---

* Infatti se ne possedesse r, il determinante funzionale di queste rispetto ad $a_1 \dots a_r$ sarebbe zero, perchè fra gli elementi di una qualunque linea esisterebbe sempre la medesima relazione lineare, omogenea, cioè quella relazione rappresentata appunto dall'equazione (3).

Nelle equazioni (4) poniamo per φ le $f_1 \ldots f_n$ e diamo alle x valori determinati, ma generali, x'. Otteniamo allora, per la determinazione delle α, n equazioni lineari omogenee di cui $r' \leqq r$ sieno indipendenti.

Se $r' = r$, le α risultano identicamente zero, e quindi gli r parametri sono essenziali. Se $r' < r$, poniamo nelle primitive equazioni, per le x altri valori determinati x'', e abbiamo così altre equazioni per la determinazione delle α; supponiamo che delle nuove equazioni ve ne sieno r'' indipendenti fra loro e dalle r' precedenti, in modo che sia $r' + r'' \leqq r$. Se $r' + r'' = r$ allora, come sopra, le α sono zero e i parametri sono essenziali; in altro caso si prosegua nello stesso modo fin che si arrivi ad un numero:

$$r' + r'' + \ldots + r^{(q-1)},$$

di equazioni fra loro indipendenti e tali che se nelle primitive (4) poniamo per le x qualunque sistema di valori arbitrari (e per φ naturalmente al solito le $f_1 \ldots f_n$) otteniamo sempre equazioni che sono conseguenza delle precedenti, per modo che il numero $r^{(q)}$, e così tutti i seguenti $r^{(q+1)} \ldots$ sieno tutti zero in qualunque modo si scelgano le x. Giunti a tal punto, per verificare se i parametri sono o no essenziali basterà esaminare il valore del numero:

$$r' + r'' + \ldots + r^{(q-1)};$$

se questo è uguale ad r i parametri sono essenziali, e non lo sono se questo è minore di r.

Come esempio, scegliamo la trasformazione:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}$$

contenente tre parametri; le derivate parziali rispetto ai tre parametri sono (riducendole allo stesso denominatore):

$$\frac{a_2 x + a_3}{(a_2 x + a_3)^2}, \quad -\frac{x(x + a_1)}{(a_2 x + a_3)^2}, \quad -\frac{x + a_1}{(a_2 x + a_3)^2}$$

ed è evidente che non si possono moltiplicare queste quantità per tre funzioni *delle sole a*, in maniera che la somma dei tre prodotti sia zero; infatti moltiplicandole per tre quantità M, N, P, dovrebbe aversi identicamente:

$$M(a_2 x + a_3) - N x(x + a_1) - P(x + a_1) = 0$$

donde:

$$N = 0$$

$$M a_2 - P = 0$$

$$M a_3 - P a_1 = 0,$$

ed essendo a_1, a_2, a_3, quantità indeterminate, le ultime due equazioni non sono coesistenti se M e P non sono zero. Dunque i tre parametri *sono essenziali*.

Consideriamo invece l'altra trasformazione:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4}$$

a quattro parametri; le quattro derivate sono:

$$\frac{x(a_3 x + a_4)}{(a_3 x + a_4)^2}, \quad \frac{a_3 x + a_4}{(a_3 x + a_4)^2}, \quad -\frac{x(a_1 x + a_2)}{(a_3 x + a_4)^2},$$

$$-\frac{a_1 x + a_2}{(a_3 x + a_4)^2},$$

ed è chiaro che moltiplicandole rispettivamente per $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\alpha_3 = a_3$, $\alpha_4 = a_4$ e sommandole si ha identicamente zero; dunque i quattro parametri non sono essenziali, ciò che del resto è evidente anche per altre considerazioni, osservando cioè che quella trasformazione non dipende che dal rapporto di tre parametri al quarto.

§ 2. — Definizione di gruppi continui di trasformazioni. Gruppi finiti e gruppi infiniti. Gruppi di Lie. Simiglianza di due gruppi.

Supponiamo date le formole: *

$$x'_i = f_i(x, a) \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{1}$$

e le funzioni f sieno, come sopra, definite, regolari per un certo campo di variabilità delle x, campo che chiameremo $((x))$, e per un certo campo di variabilità delle a, che chiameremo $((a))$ e sieno

* Per brevità scriveremo spesso $f(x, a)$ in luogo di $f(x_1 \ldots x_n \, a_1 \ldots a_r)$.

tali che per nessun punto di tal campo il determinante funzionale delle f sia zero.

Su queste funzioni facciamo le ipotesi che per un sistema di valori delle a, a due diversi sistemi di valori delle x, corrispondono sempre due diversi sistemi di valori delle x', e che le x' sieno sempre anch'esse nel campo $((x))$.

Per ogni sistema di valori delle a si ha una trasformazione; supponendo che i parametri a sieno essenziali, si hanno ∞^{2r} trasformazioni. Immaginiamo ora che queste sieno tali che il *prodotto* di due di esse (v. § 1), cioè per es. il prodotto di quella in cui i parametri hanno i valori a, e di quella in cui i parametri hanno i valori b, sia ancora una trasformazione del medesimo assieme, cioè sia la trasformazione le cui formole sono le medesime (1) dove i parametri hanno acquistati i valori c, compresi nel campo di variabilità $((a))$; se ciò si verifica qualunque sieno le due trasformazioni che si moltiplicano fra di loro, si dirà che quell'*assieme di trasformazioni costituisce un gruppo*. Questo gruppo si dice poi ancora *finito*, perchè ammettiamo che il numero r dei parametri sia finito.

I gruppi possono essere *continui* o *discontinui*; *continui*, quando da una loro trasformazione si può passare con continuità ad ogni altra con la variazione continua dei valori dei parametri; *discontinui*, quando ciò non può farsi. Un gruppo continuo contiene evidentemente infinite trasformazioni. *Noi in tutto ciò che segue supporremo che si tratti sempre di gruppi continui.*

Un gruppo di cui tutte le trasformazioni sieno comprese fra quelle di un altro, si dice *sottogruppo* di questo *(vedi però le considerazioni fatte più sotto).*

Il concetto di gruppo, quale qui è stato esposto, è strettamente affine all'analogo concetto della teoria delle sostituzioni, salvo che in tale teoria un gruppo risulta sempre di un numero finito di sostituzioni, ed è sempre *un gruppo discontinuo.*

Il concetto di gruppo di trasformazioni è di data assai più recente che non l'altro relativo alle sostituzioni; esso fu per la prima volta esplicitamente enunciato in una Memoria di SOPHUS LIE (*Società delle Scienze di Christiania*, 1871, pag. 243) e nella Dissertazione di F. KLEIN (*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872, tradotta anche in italiano, *Annali di Mat.*, ser. 2, Vol. XVII, ed in altre lingue), ed ha avuto il suo maggiore sviluppo dalle opere specialmente del LIE e dei suoi scolari.

Oltre le numerose memorie di LIE e di altri sul medesimo argomento, comparse negli ultimi trent'anni, e che noi citeremo man mano in seguito, le prime opere sistematiche su questa teoria sono quelle cominciate a pubblicare da LIE stesso dal 1888 in poi, in collaborazione coi suoi scolari ENGEL e SCHEFFERS; queste sono: *Theorie der Transformationsgruppen*, tre volumi, Leipzig, 1888-1893; *Vorlesungen über gewönliche Differentialgl. mit bekannten infinites. Transform.*, Leipzig, 1891; *Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*,

Leipzig, 1893; *Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen*, Leipzig, 1895; *Geometrie der Berührungstransformat.*, Leipzig, 1896.

Per moltissime indicazioni storiche e filosofiche sulla portata di questa nuova teoria, sui suoi precursori di vario genere, sulle molteplici relazioni che essa ha con altre parti della Matematica, sarà interessante leggere le prefazioni ai Vol. I e III dell'opera succitata di LIE *(Th. d. Transf.)*, e il § 20 della Memoria di LIE contenuta nei *Math. Ann.* Vol. XVI (pag. 525-528).

Per un riassunto dei lavori e risultati ottenuti da altri sulla medesima teoria, si può poi anche vedere il Cap. 29 del Vol. III della suddetta opera di LIE (pag. 753-815).

È interessante ora, a rischiarare il concetto generale di gruppo, fare le seguenti considerazioni.

Quando sono assegnate delle formole di trasformazione $x'_i = f_i\,(x, a_1 \dots a_r)$, si ammette che le funzioni f, sieno funzioni analitiche, regolari dei loro argomenti, cioè che possano svilupparsi in serie di potenze intere, positive, nell'intorno di ciascun punto del campo in cui sono definite. Ora la limitazione di questo campo potrà o farsi dipendere dalla natura delle funzioni f, ovvero da altre circostanze; nel primo caso dovrà intendersi che le funzioni f debbano sempre vieppiù estendersi analiticamente, secondo i metodi noti della teoria delle funzioni analitiche, finchè lo comporti la natura delle funzioni stesse, e non si incontrino dei cosidetti spazi lacunari dentro cui le funzioni non possano analiticamente estendersi.

Ma si può anche ammettere che lo spazio in cui debbano estendersi le funzioni f, considerate come funzioni dei parametri a, possa essere ancora più ristretto del precedente, *pur conservandosi la proprietà di formare un gruppo.*

Per es. se io considero la formola $x' = a\,x$, il gruppo corrispondente, nel primo senso, è quello per cui la quantità a riceva tutti *i possibili valori*, potendosi evidentemente per tutti i possibili valori estendersi la funzione x' di a, mentre che secondo un concetto più generale si possono considerare altri gruppi rappresentati dalla medesima formola, ma dove a non debba più avere tutti i possibili valori, bensì debba p. es. limitarsi ad avere solo quelli di modulo minore di *1*. È da notarsi però che il gruppo $x' = a\,x$, dove $| a |$ è minore di *1*, può anche considerarsi come un gruppo della prima specie; basterà perciò fare un mutamento di parametri e porre per a una tal funzione di un nuovo parametro λ, che al variare di λ essa non possa che acquistare i valori di modulo minore di *1*. Ciò si può effettivamente fare considerando l'inversa di una nota funzione a spazio lacunare, funzione la quale è definita solo per tutti i punti di un cerchio di centro zero e di raggio *1* (vedi pag. 164, Vol. I, del Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen).*

Il fatto però che *per questo speciale esempio*, il secondo punto di vista possa rientrare nel primo, non prova che ciò possa farsi in generale.

Per intenderci noi diremo che un gruppo definito secondo il primo dei due punti di vista dianzi considerati è *un gruppo di* Lie, perchè di tal na-

tura sono specialmente i gruppi su cui si aggira la teoria di LIE; non escludiamo però la considerazione dei gruppi anche della seconda specie.

In corrispondenza a questo doppio punto di vista, si hanno due diverse specie di *sottogruppi*, e cioè: 1.° *sottogruppi* ottenuti limitando in un opportuno modo il campo di variabilità dei parametri, ma che però contengono lo stesso numero di parametri essenziali del gruppo dato; 2.° *sottogruppi* in cui il numero dei parametri essenziali è minore di quello del dato. Li chiameremo rispettivamente *sottogruppi di prima e di seconda specie*, e sono evidenti i seguenti risultati:

Un sottogruppo di prima specie non può essere mai un gruppo di LIE.

Un gruppo ad un sol parametro essenziale non può avere sottogruppi di seconda specie.

Il LIE non considera che sottogruppi di 2.ª specie (v. *Th. d. Transf.*, I, pag. 204), e anche noi, a meno che non lo diciamo esplicitamente, non considereremo che questi.

Abbiamo detto che i gruppi definiti come sopra si chiamano *finiti* perchè dipendono da un numero finito r di parametri essenziali. È utile ora far vedere, per completare le nostre idee in proposito, da qual punto di vista si potrebbe prendere le mosse per definire il gruppo *infinito*, giacchè evidentemente il dire che per questi il numero r diventi infinito non ha un significato determinato. Conviene allora definire il gruppo finito di trasformazioni in una maniera diversa da quella

qui adottata, e tale che se ne possa immediatamente fare l'estensione per definire il gruppo infinito.

Si procede nel seguente modo: deriviamo le equazioni (1) rispetto alle x, tante volte quanto basti per eliminare dalle relazioni così ottenute le costanti a; abbiamo così un sistema di equazioni differenziali, i cui integrali sono le (1). Queste equazioni differenziali possono bastare per definire il gruppo, intendendo che le formole che danno le trasformazioni del gruppo stesso sieno esattamente gli integrali di queste equazioni.

Per il modo col quale abbiamo generato questo sistema, evidentemente esso soddisfa alle due seguenti proprietà:

1.° i suoi integrali più generali conterranno r costanti arbitrarie;

2.° se $x'_i = f_i(x, b)$ è una sua soluzione particolare, e $x'_i = f_i(x, a)$ ne è un'altra, anche $x'_i = f_i(f(x, a), b)$ sarà un'altra soluzione.

Possiamo dunque dire che il gruppo finito di trasformazioni, può definirsi mediante un sistema di equazioni differenziali della specie anzidetta, cioè avente le due suindicate proprietà.

Da tal punto di vista la estensione al caso di r *infinito* è immediata: basterà infatti immaginare un sistema di equazioni differenziali avente la 2.ª proprietà, ma non la 1.ª; gli integrali di tal sistema daranno le formole di trasformazione.

Un esempio semplicissimo di ciò è dato dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d x'_i}{d x_j} = 0 \qquad (i, j = 1, \dots n)$$

dove si intende che i e j *sono sempre diversi* fra loro, il quale si integra colle relazioni:

$$x'_i = \varphi_i (x_i),$$

dove le φ_i sono delle funzioni arbitrarie *del solo argomento* x_i.

Queste relazioni soddisferanno il sistema suddetto, e d'altra parte soddisfano alla proprietà 2.ª senza soddisfare alla proprietà 1.ª, perchè le φ essendo arbitrarie non contengono un numero determinato e finito di parametri arbitrari.

Si può definire il gruppo infinito in una maniera anche più generale, ma su ciò non indugiamo e rimandiamo alla introduzione del Vol. I dell'opera citata di Lie (*Th. d. Trans.*, ecc.), e all'altra opera, anche citata, dedicata specialmente ai gruppi infiniti.

Torniamo ora alla definizione di gruppo finito e continuo.

Perchè le trasformazioni (1) formino un gruppo. bisogna che il prodotto delle due:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= f_i (x, a) \\ x''_i &= f_i (x', b) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sia una trasformazione del tipo:

$$x''_i = f_i (x, c);$$

ma quel prodotto è:

$$x''_i = f_i [f (x, a), b]$$

dunque deve essere:

$$f_i\,[f(x,\ a),\ b] = f_i\,(x,\ c)$$

identicamente, cioè nel primo membro di questa relazione, le a e b devono raggrupparsi in maniera da formare r aggruppamenti che chiamiamo c, le quali sono perciò funzioni delle a e delle b:

$$c_k = \varphi_k\,(a_1\,a_2 \ldots a_r,\ b_1\,b_2 \ldots b_r) = \varphi_k\,(a,\ b). \quad (3)$$

Perchè si abbia un gruppo le c definite da queste formole, devono essere comprese nel campo $((a))$, quindi le $\varphi_k\,(a,\ b)$ devono essere tali funzioni delle a e b, che se le a e b sono comprese in $((a))$, anche le c sono comprese in $((a))$.

Ora si può mostrare *che le equazioni* (3) *devono essere risolubili sia rispetto alle a che rispetto alle b.*

In effetti risolviamo rispetto alle x le:

$$x'_i = f_i\,(x,\ a),$$

e si ottenga:

$$x_i = F_i\,(x',\ a);$$

sostituiamo tali valori di x in:

$$x''_i = f_i\,(x,\ c)$$

ed otteniamo:

$$x''_i = f_i\,[F\,(x',\ a),\ c].$$

Queste relazioni fra le x'' e le x' devono per necessità coincidere identicamente con quelle al-

tre fra le medesime variabili poste di sopra, perchè tutto il nostro procedimento non è stato altro che una serie di procedimenti di eliminazione applicati ai due sistemi di formole fondamentali (2): quindi deve aversi identicamente:

$$f_i\,[F(x', a), c] = f_i\,(x', b),$$

e da queste relazioni che devono essere identiche, si ricava che le b risultano funzioni delle a e delle c; analogamente potrebbero ricavarsi le a funzioni delle b e delle c, ed il teorema è dimostrato.

Lasciando ora fisse le a, poichè le b possono avere ∞^{2r} valori complessi, anche le c possono avere valori arbitrari, in numero di ∞^{2r}, altrimenti le b, che sono funzioni delle c, le quali sieno legate da relazioni, non potrebbero assumere altrettanti valori arbitrari (si intende però sempre limitati nel campo di variabilità dei parametri). Dall'essere dunque le c indipendenti, ne viene *che il determinante funzionale delle* φ_k *rispetto alle* b *(e così anche rispetto alle* a*) deve essere diverso da zero nel campo di variabilità dei parametri, in cui immaginiamo definite e regolari le* f.

Come esempio semplice consideriamo quello delle trasformazioni:

$$x' = a_1\,x + a_2.$$

È evidente che queste trasformazioni formano un gruppo, perchè se moltiplico la precedente per l'altra:

$$x'' = b_1\,x' + b_2$$

ottengo:

$$x'' = b_1 (a_1 x + a_2) + b_2 = b_1 a_1 x + b_1 a_2 + b_2$$

che può scriversi:

$$x'' = c_1 x + c_2$$

se si pone:

$$c_1 = b_1 a_1 \quad , \quad c_2 = b_1 a_2 + b_2 ;$$

si ottiene cioè una trasformazione del medesimo tipo di quelle da cui si è partiti e che non ne differisce che solo per i valori dei parametri. Le funzioni φ nel nostro caso sono:

$$c_1 = \varphi_1 = b_1 a_1 \quad , \quad c_2 = \varphi_2 = b_1 a_2 + b_2 ,$$

le quali sono infatti risolubili rispetto alle a_1, a_2 e alle b_1 e b_2, e danno propriamente:

$$a_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad , \quad a_2 = \frac{c_2 - b_2}{b_1}$$

$$b_1 = \frac{c_1}{a_1} \quad , \quad b_2 = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1} .$$

È interessante fare fin d'ora una osservazione fondamentale riguardo alla costituzione di un gruppo nel senso da noi definito. Nella teoria dei gruppi di sostituzioni si sa che ogni gruppo contiene anche la sostituzione identica, e che ogni gruppo contiene sempre di ogni sua sostituzione anche la inversa. Ora è importante osservare che queste proprietà non convengono in generale ai gruppi di trasformazioni quali li abbiamo di sopra definiti.

In effetti perchè si abbia la trasformazione identica, bisogna che i parametri a, acquistino tali particolari valori, che chiameremo a^0, che le funzioni $f_i\,(x, a)$ si riducano identicamente alla forma x_i, cioè che in $f_i\,(x, a^0)$ scompaiano tutte le variabili, meno x_i, e questa resti sotto forma intera, a primo grado e col coefficiente uno.

Ora prima di tutto non si può affermare *a priori* che esistano sempre tali valori costanti a^0 per cui le f_i si riducano identicamente ad x_i, ed inoltre, anche ammessa l'esistenza degli a^0, non ne viene di conseguenza che i valori a^0 restino compresi nel campo di variabilità $((a))$, nel quale sono definite le funzioni f corrispondenti a quelle trasformazioni del gruppo che vogliamo considerare.

Ammettiamo ora che il gruppo contenga la trasformazione identica, cioè che i valori a^0 esistano e sieno compresi nel campo $((a))$.

Si devono allora distinguere due casi, e cioè o il campo $((a))$ è l'*intero campo* inerente alla natura delle funzioni f, cioè il gruppo di cui si tratta è uno di quelli, da noi chiamati, *gruppi di* Lie, ovvero il campo $((a))$ è assegnato da noi ed è perciò una parte del precedente, scelta naturalmente in maniera che le formole di trasformazione formino un gruppo.

Nel primo caso essendo il punto a^0 un punto in cui le funzioni f sono regolari, ciò significa che esiste tutto uno spazio circondante a^0 in cui esse sono sviluppabili in serie di potenze, e allora per un teorema che dimostreremo in seguito (v. Cap. I, § 5) *almeno per un tale spazio, di ogni trasformazione esisterà nel gruppo la inversa, cioè un'al-*

tra il cui prodotto colla prima è la trasformazione identica.

Se invece si tratti del secondo caso, allora ciò non può più dedursi, giacchè p. es. a^0 potrebbe essere al confine del campo $((a))$ stabilito da noi indipendentemente dalla natura delle f, e allora la trasformazione inversa di una data potrebbe avere parametri che sieno fuori di $((a))$.

Un esempio semplicissimo relativo a queste considerazioni è il seguente: consideriamo le trasformazioni:

$$x' = x\,a$$

dove intendiamo che il parametro a sia limitato in maniera che il suo valore assoluto sia sempre minore di uno, $|a| < 1$. È evidente che il prodotto di due tali trasformazioni è ancora una della stessa specie, e quindi che esse formano un gruppo; ma è chiaro parimenti che in tal gruppo non è compresa la trasformazione identica (per la quale dovrebbe essere $a = 1$), ed inoltre di ogni trasformazione non esiste nel gruppo l'inversa, perchè per l'inversa il valore del modulo del parametro dovrebbe essere maggiore di uno. Lo stesso otteniamo se invece di limitare i valori del parametro nel modo come abbiamo fatto di sopra, poniamo:

$$|a| \leq \varepsilon < 1,$$

scegliendo una qualunque quantità ε minore di uno; se invece poniamo:

$$|a| \leq 1$$

allora si ha ancora un gruppo, ma esso contiene la trasformazione identica, mentre poi, analogamente come prima, di ogni trasformazione non esiste l'inversa. Ciò è d'accordo con quanto già abbiamo asserito, che cioè la prima proprietà non porta con sè per conseguenza la seconda, quando *non si tratti di gruppi di* LIE.

Invece è evidente che la seconda proprietà porta con sè per conseguenza la prima, giacchè se si ammette che in un gruppo, di una trasformazione contenutavi esista l'inversa, ne viene che deve esservi contenuta la trasformazione *prodotto*, la quale è l'identica.

Avendo qui limitato il campo di variabilità di a, in modo estraneo alla natura della funzione, il gruppo che siamo venuti ad ottenere non è un gruppo di LIE; se però noi possiamo fare un cangiamento di parametro, ponendo a eguale a $\chi(\lambda)$, tale che continuando analiticamente χ fin che si può, i moduli dei suoi valori non possano mai raggiungere *1*, allora si sarà venuti a dare l'esempio di *un gruppo di* LIE *nel nuovo parametro* λ, *non avente trasformazione identica*. Ora che ciò si possa fare, si vede facilmente ricorrendo alle funzioni a spazi lacunari, come fu mostrato da ENGEL nel 1884 (vedi LIE, *Th. d. Transf.*, I, pag. 165).

Quindi *esistono anche gruppi di* LIE *senza la trasformazione identica*, contrariamente a quanto sul principio credeva LIE stesso. Non ne esistono però (come abbiamo sopra detto) contenenti la idêntica, e tali che le trasformazioni, almeno nell'intorno di questa, *non* si possano raccogliere a due a due, una inversa dell'altra.

Vogliamo ora dimostrare un teorema relativo alle trasformazioni inverse di quelle di un gruppo dato:

Tutte le trasformazioni inverse di quelle di un gruppo dato ad r parametri essenziali, formano ancora un gruppo ad r parametri.

In effetti dalle equazioni:

$$x'_i = f_i(x, a), \quad x''_i = f_i(x', b), \quad x''_i = f_i(x, c) \tag{4}$$

si ottengono con la risoluzione:

$$x_i = F_i(x', a), \quad x'_i = F_i(x'', b), \quad x_i = F_i(x'', c), \tag{5}$$

e se le trasformazioni date formano un gruppo dovrà essere:

$$c_k = \varphi_k(a, b). \tag{6}$$

Ora le tre formole (5), tenuto conto delle (6), ci dicono appunto che le trasformazioni inverse formano un gruppo, perchè esse rappresentano un sistema di formole coesistenti identicamente, cioè indipendentemente dai valori delle x, cioè a dire che eliminando, per es., x' fra le prime due, si ottengono formole fra x e x'' che devono per necessità coincidere colle ultime delle (5), cioè colle $x_i = F_i(x'', c)$; deve quindi identicamente essere:

$$x_i = F_i[F(x'', b), a] = F_i(x'', c),$$

il che ci dimostra l'assunto.

Prima di terminare questo paragrafo, vogliamo dare ancora il concetto di *gruppi simili fra loro*, sebbene alla teoria della simiglianza dedicheremo in seguito un paragrafo apposito (v. Cap. III, § 5).

Dati due gruppi:

$$x'_i = f_i\,(x_1 \ldots x_n,\, a_1 \ldots a_r)$$
$$X'_i = \psi_i\,(X_1 \ldots X_n,\, A_1 \ldots A_r)$$

col medesimo numero di variabili e col medesimo numero di parametri essenziali, diremo che i due gruppi son *simili*, quando si possono porre le X funzioni delle x, le X' funzioni analoghe delle x', e le A funzioni delle a, in maniera che le seconde formole si riducano esattamente identiche alle prime.

Possiamo far vedere che due gruppi simili godono di questa proprietà: *che le loro trasformazioni si possono far corrispondere biunivocamente fra loro, cioè una ad una, in maniera che al prodotto di due trasformazioni corrisponda il prodotto delle trasformazioni corrispondenti.* Una siffatta proprietà è quella che caratterizza il cosidetto *isomorfismo fra due gruppi*, di cui tratteremo in seguito (v. Cap. III, § 4).

Per dimostrare l'assunto, consideriamo come corrispondenti due trasformazioni, una del primo e una del secondo gruppo, quando ai valori dei parametri dell' una corrispondano precisamente i valori dei parametri dell'altra, nelle funzioni con cui per ipotesi questi si esprimono mediante i primi.

Consideriamo inoltre due trasformazioni del primo gruppo con i parametri a, b, e la trasforma-

zione prodotto coi parametri c; si avranno allora le relazioni identiche:

$$f_i\,[f(x, a), b] = f_i\,(x, c).$$

Ai valori a corrispondano i valori A dei parametri dell' altro gruppo, cioè a dire, le funzioni con le quali questi si esprimono mediante i primi, acquistino i valori A, quando i primi diventino a, e similmente ai valori b, corrispondano i B; il prodotto delle trasformazioni di questo secondo gruppo, corrispondenti ai parametri A, B, abbia per parametri C, in modo che si abbia identicamente:

$$\psi_i\,[\psi(X, A), B] = \psi_i\,(X, C).$$

Ora per ipotesi le ψ diventano le f quando per X, e A poniamo quelle tali funzioni di x e a, supposte nella definizione di simiglianza, cioè p. es., $X_i = V_i\,(x)$, e $A_k = U_k\,(a)$; si vede quindi che il primo membro di queste relazioni diventa identicamente il primo membro delle precedenti, quando si fanno queste apposizioni; dunque ponendo per A e B quelle tali medesime funzioni U di a e b (oltre che le X funzioni delle x), anche i due secondi membri devono identificarsi; ma questi secondi membri si identificano infatti, per ipotesi, se poniamo (oltre che $X_i = V_i(x)$), anche $C_k = U_k\,(c)$, dunque il porre:

$$A_k = U_k\,(a)$$

$$B_k = U_k\,(b)$$

corrisponde a porre:

$$C_k = U_k(c)$$

cioè se a corrisponde ad A, e b a B, anche c corrisponderà a C.

Vogliamo infine notare che spesse volte interpreteremo le x come le coordinate di un punto di uno spazio ad n dimensioni, il che permetterà di dare una tal quale veste geometrica alle nostre considerazioni, immaginando i gruppi come gruppi di trasformazioni fra i punti del suddetto spazio.

§ 3. — Esempi di gruppi più comuni. Gruppi lineari, gruppi proiettivi, gruppi Cremoniani.

Fra i gruppi di trasformazioni più ordinari, noteremo prima il cosidetto *gruppo proiettivo*, dato dalle formole:

$$x'_i = \frac{a_{i1}\,x_1 + \ldots + a_{in}\,x_n + a_{i,n+1}}{a'_1\,x_1 + \ldots + a'_n\,x_n + a'_{n+1}}, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

con $n\,(n+2)$ parametri essenziali.

In queste formole per ogni valore dell'indice i il denominatore è sempre il medesimo.

Un sottogruppo del precedente è quello nel quale

$$a'_1 = a'_2 = \ldots = a'_n = 0,$$

per modo che le x' si riducano a funzioni intere delle x. Questo si chiama il *gruppo lineare generale* (LIE); di esso vi sono due sottogruppi notevoli, cioè quello per cui tutte le $a_{i,n+1}$ sono zero e che chiamasi il *gruppo lineare omogeneo*, e quello per il quale è eguale ad 1 il determinante delle $a_{i1} \ldots a_{in}$, e che chiamasi il *gruppo lineare speciale.*

Che il primo di questi due sia un gruppo, è cosa ovvia e facile a verificarsi; che il secondo lo sia, anche lo si può vedere facilmente.

Si abbia la trasformazione:

$$x'_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n + a_{i,n+1}$$

dove sia:

$$| a_{ij} | = 1,$$

intendendo con $| a_{ij} |$ il determinante delle a_{ij}, e si moltiplichi per l'altra:

$$x''_i = b_{i1} x'_1 + \ldots + b_{in} x'_n + b_{i,n+1}$$

dove sia:

$$| b_{ij} | = 1.$$

La trasformazione prodotto sarà:

$$\begin{aligned} x_i = (b_{i1} a_{11} + \ldots + b_{in} a_{n1}) x_1 + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + (b_{i1} a_{1n} + \ldots + b_{in} a_{nn}) x_n + \\ + (b_{i1} a_{1n+1} + \ldots + b_{in} a_{n,n+1}) \end{aligned}$$

e il determinante dei coefficienti è evidentemente il prodotto dei due determinanti $|a_{ij}|$ e $|b_{ij}|$ e quindi il suo valore è anche 1.

Può poi considerarsi ancora un altro sottogruppo comune dei due sottogruppi ultimamente trovati, ed è quello dato dalle formole:

$$x'_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$$

dove sia:

$$| a_{ij} | = 1 ;$$

questo sottogruppo può chiamarsi *gruppo speciale lineare omogeneo.*

I precedenti gruppi sono della specie di quelli cosiddetti *Cremoniani.*

Una trasformazione fra le x' e x dicesi *Cremoniana* o *birazionale*, quando le x' si esprimono razionalmente mediante le x, ed i parametri a, e le x anche razionalmente mediante le x' e le a. Un gruppo di tali trasformazioni si dirà poi *Cremoniano*, quando è un gruppo di Lie, cioè quando ammettiamo che il campo in cui devono estendersi i valori dei parametri sia il campo *totale*, cioè quello di tutti i possibili valori, per i quali appunto, come si sa, sono definite le funzioni razionali.

Definito in tal modo un gruppo Cremoniano, è chiaro che per esso non potranno più sussistere le considerazioni dipendenti dalla limitazione dei campi di variabilità da noi fatte alla fine del § 2, anzi si può dimostrare che esso gode sempre delle due proprietà: *di possedere la trasformazione identica, e di contenere di ciascuna trasformazione l' inversa.*

In effetti risolvendo le $c_k = \varphi_k(a, b)$ rispetto alle a, abbiamo:

$$a_k = \chi_k(b, c),$$

e ponendo in queste $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2, \ldots c_r = b_r$, il che può farsi perchè, come abbiamo detto, il campo di variabilità dei parametri è il campo totale, si ricavino per le a, i valori $a^0_1, \ldots a^0_r$; ora la trasformazione:

$$x'_i = f_i(x, a^0)$$

è la trasformazione identica. Infatti, per le ipotesi fatte, il prodotto delle due:

$$x'_i = f_i(x, a^0),$$
$$x''_i = f_i(x', b)$$

è la trasformazione:

$$x''_i = f_i(x, b),$$

e questi tre sistemi di formole sono fra loro, al solito, coesistenti identicamente; perciò da essi ricaviamo identicamente:

$$f_i(x', b) = f_i(x, b);$$

tenendo ora conto che le f sono funzioni razionali, da queste formole non può che ricavarsi:

$$x'_i = x_i,$$

e queste relazioni devono essere le medesime di quelle fra x' e x dalle quali siamo partiti in principio; con ciò è dimostrato l'assunto.

È utile fare la seguente osservazione: i valori a^0, per il modo col quale sono stati ottenuti di sopra, sembrerebbero dipendere dalle quantità arbitrarie b; ora noi possiamo far vedere che invece ne sono indipendenti. Se le a^0 dipendessero dalle b, eliminando queste, si avrebbero fra le a^0 delle relazioni, le quali sieno in numero di $r - s$ $(s < r)$, o anche nessuna relazione (quando s fosse eguale ad r, cioè quando le a^0 fossero funzioni indipendenti delle b). Variando dunque le b in ∞^{2r} modi diversi, le a^0 varierebbero in $\infty^{2r-2(r-s)} = \infty^{2s}$ modi diversi, e per ogni siffatto sistema di valori per le a^0, la trasformazione corrispondente sarebbe sempre la trasformazione identica. Consideriamo ora una trasformazione qualunque coi parametri a, e moltiplichiamola per tutte le ∞^{2s} coi parametri a^0; la trasformazione prodotto dovrebbe essere sempre la stessa, cioè quella stessa da cui siamo partiti coi parametri a, mentre i parametri della trasformazione prodotto verrebbero ad avere ∞^{2s} sistemi di valori diversi: dunque i parametri a della trasformazione da cui siamo partiti, e che del resto sono affatto arbitrari, si potrebbero far variare in ∞^{2s} modi diversi, pur lasciando inalterata la trasformazione. Di qui risulta che le trasformazioni del gruppo non sarebbero più ∞^{2r}, ma $\infty^{2(r-s)}$ diverse, cioè che i parametri a non sarebbero più essenziali, contro l'ipotesi. Dunque *le a^0 devono essere indipendenti dalle b.*

Può ora inoltre dimostrarsi che nel gruppo Cremoniano di ogni trasformazione esiste l'inversa, giacchè se:

$$b_k = \psi_k\,(a,\,c)$$

sono le formole che si ottengono dalla risoluzione delle $c_k = \varphi_k(a, b)$ rispetto alle b, ponendovi le c eguali alle a^0, si abbiano le $b_k = \bar{a}_k$; dunque ad ogni sistema di valori a_k corrisponderà un sistema $\bar{a}_k$, e le due trasformazioni corrispondenti ai parametri a_k, $\bar{a}_k$ sono l'una inversa dell'altra, perchè fatto il loro prodotto si ha la trasformazione i cui parametri (in generale c) sono precisamente gli a^0.

§ 4. — Equazioni differenziali caratteristiche di un gruppo. Primo teorema fondamentale della teoria dei gruppi. Esempio.

Perchè le funzioni f_i, che servono a stabilire le formole di trasformazione, sieno tali che queste formino effettivamente un gruppo, è chiaro che devono essere soggette a delle condizioni. Ci proponiamo ora di esaminare appunto di che specie sono tali condizioni e quali sono; e troveremo che esse possono essere espresse da certi sistemi di equazioni differenziali cui le f_i devono soddisfare. Queste equazioni le chiameremo equazioni differenziali *caratteristiche* di un gruppo, per la cui determinazione, avvertiamo però, esse rappresentano in generale delle condizioni necessarie, ma non sufficienti.

Questa ricerca è naturalmente una delle più fondamentali di tutta la teoria, e il teorema cui essa conduce, fu chiamato da Lie il *primo teo-*

rema fondamentale della teoria dei gruppi (LIE-ENGEL, *Th. d. Transf.*, III, pag. 545).

Il concetto di gruppo è analiticamente espresso dal sistema delle formole:

$$\left.\begin{array}{ll} x'_i = f_i(x, a) & \\ x''_i = f_i(x', b) & (i = 1, 2, \ldots n) \\ x''_i = f_i(x, c) & \\ c_k = \varphi_k(b, a) & (k = 1, 2, \ldots r). \end{array}\right\} \quad (1)$$

le quali devono considerarsi come identicamente coesistenti. Da esse si ricava:

$$f_i(x', b) = f_i(x, c). \quad (2)$$

Dei due sistemi di variabili x, x', possiamo considerarne come indipendente uno solo, per es., x; e dei tre sistemi a, b, c, possiamo considerarne come indipendenti due, per es., a e c. Da tal punto di vista, e tenendo poi anche presente che le x' dipendono anche dalle a, deriviamo le (2) rispetto ad a_k, ed otteniamo:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial x'_h} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k} = 0.$$

Teniamo fisso l'indice k, e facciamo variare i da 1 ad n; si ha allora un sistema di n equazioni lineari nelle quantità $\frac{\partial x'_1}{\partial a_k}, \frac{\partial x'_2}{\partial a_k}, \ldots \frac{\partial x'_n}{\partial a_k}$, di cui il determinante dei coefficienti è il determinante funzionale delle $f_i(x', b)$ rispetto alle x', il qual determinante è per ipotesi diverso da zero (v. § 1).

Il precedente sistema potrà dunque risolversi rispetto alle sopradette derivate delle x' rispetto ad a_k, e potrà ottenersi così il medesimo sistema sotto la forma:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \Xi_{jk}(x', b) \frac{\partial b_j}{\partial a_k}. \tag{3}$$

Ora mediante le relazioni fra c, a e b, cercheremo di eliminare dalle (3) le derivate delle b rispetto alle a. Per ciò deriviamo rispetto ad a_k le

$$c_s = \varphi_s(a, b)$$

ed otteniamo:

$$-\frac{\partial \varphi_s}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k}, \quad (s = 1, 2, \dots r)$$

le quali risolute rispetto alle:

$$\frac{\partial b_1}{\partial a_k}, \frac{\partial b_2}{\partial a_k}, \dots \frac{\partial b_r}{\partial a_k},$$

(risoluzione che può farsi perchè il determinante dei coefficienti di queste equazioni lineari, non è altro che il determinante funzionale delle φ rispetto alle b, determinante che è diverso da zero, v. § 2), danno:

$$\frac{\partial b_j}{\partial a_k} = \Psi_{jk}(a, b), \tag{a}$$

e quindi sostituendo nelle (3) si hanno le formole:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \Xi_{jh}(x', b) \Psi_{jk}(a, b). \tag{4}$$

Queste sono delle equazioni differenziali cui devono soddisfare le x' considerate come funzioni delle a; è da notarsi che il secondo membro delle (4) si compone sempre di una somma di prodotti di funzioni di x' e b, per funzioni di a e di b.

Nelle precedenti equazioni (4) le quantità che compariscono sono solamente le x', le a, e le b; ora le b non dipendono in alcun modo dalle a e si potrebbero scegliere per le b dei qualunque valori arbitrarii, ed ogni volta ottenere sempre un sistema di equazioni differenziali come (4), cui devono soddisfare le x'_h, cioè le funzioni $f_h(x, a)$, le quali non *dipendono dalle* b. Di qui ne viene che si può nelle (4) intendere posti per le b dei valori numerici particolari, in modo da farne scomparire il loro simbolo dalle formole, ed affermare che alle equazioni differenziali *particolari* che così si vengono ad ottenere soddisfano le medesime funzioni *generali* $f_h(x, a)$, e ciò appunto perchè queste non devono dipendere dalle b.

La conclusione di ciò è che *esisterà sempre un sistema di equazioni differenziali del tipo:*

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \psi_{jh}(a) \qquad (A)$$

cui devono sempre soddisfare le x'_h, *cioè le* $f_h(x, a)$, esisteranno cioè sempre delle funzioni ξ di sole x' e ψ di sole a, in maniera che sieno soddisfatte le (A). Questo sistema (A) di equazioni differenziali è il primo di quelli cui volevamo giungere nella presente ricerca.

Osserviamo che le funzioni ξ e ψ che compaiono in queste formole, sono rispettivamente le Ξ e Ψ

della formola (4), quando per le b si pongono dei particolari valori arbitrarii.

In riguardo alle funzioni ξ che compaiono nelle (A) si può dimostrare che *esse non possono mai soddisfare ad una relazione lineare del tipo:*

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh} = 0, \qquad (5)$$

dove le g sieno indipendenti dalle x'.

In effetti le ξ non sono altro che le Ξ quando in queste pongo per le b quei valori particolari fissi di cui abbiamo fatto sopra parola; ora le Ξ, ricavate dal sistema di formole (4) nelle quali si fa variare k da 1 ad r, sono:

$$\Xi_{jh}(x', b) = \mathrm{A}_{j1} \frac{\partial x'_h}{\partial a_1} + \ldots + \mathrm{A}_{jr} \frac{\partial x'_h}{\partial a_r} \qquad (6)$$

dove le A sono funzioni di a e b, e il determinante delle A è diverso da zero, perchè queste equazioni devono essere risolubili rispetto alle $\frac{\partial x'_h}{\partial a_k}$, dovendo questo sistema coincidere col sistema (4).

Ponendo nelle (6) per b i particolari valori fissi, le A diventino α, e la (6) diventi:

$$\xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k}. \qquad (7)$$

Se ora sussistesse la (5), sostituendo in essa i valori (7), si avrebbe:

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{k=1}^{r} P_k \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = 0,$$

dove le P sono funzioni delle sole a. Dunque le $x_h = f_h$ soddisferebbero a delle equazioni lineari, omogenee, di 1° ordine, del medesimo tipo di quelle di cui è parola nel § 2, e a cui appunto esse non possono soddisfare se i parametri a sono essenziali, come si suppone. Risulta dunque che tutte le P_k sono zero, cioè:

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \alpha_{jk} = 0; \qquad (k = 1, 2, \dots r)$$

ma allora sono zero anche le g, perchè in questo ultimo sistema di equazioni lineari il determinante delle α è diverso da zero, tale essendo, come si è sopra osservato, quello delle A. Con ciò è dimostrato il teorema.

Passiamo ora a stabilire un altro sistema di equazioni differenziali.

Se paragoniamo la (3) con la formola identica:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial x'_h}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k},$$

otteniamo:

$$\Xi_{jk} = \frac{\partial x'_h}{\partial b_j}, \tag{b}$$

e quindi per le (6):

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_j} = \sum_{k=1}^{r} A_{jk} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k}, \tag{8}$$

che a sua volta paragonata con la formola identica:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_j} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial a_k}{\partial b_j} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k},$$

dà il significato delle A, cioè:

$$A_{jk} = \frac{\partial a_k}{\partial b_j}. \tag{c}$$

Nella (8) sostituendo per $\frac{\partial x'_h}{\partial a_k}$ i valori dati dalle (*A*) abbiamo intanto:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_j} = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x') \sum_{k=1}^{r} A_{jk}\, \psi_{\varrho k}(a) =$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x')\, \theta_{\varrho j}(a, b).$$

Possiamo far vedere che le θ che qui compariscono sono indipendenti dalle a, giacchè derivando la precedente relazione rispetto ad a_s, considerando come fra loro indipendenti le x', le a, e le b (il che può farsi perchè le sole relazioni fondamentali sono le (1), dalle quali non può ricavarsi legami fra tali quantità), si ha:

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x') \frac{\partial \theta_{\varrho j}(a, b)}{\partial a_s},$$

e per il teorema di sopra dimostrato, non potendo sussistere una tale relazione lineare fra le ξ, che sarebbe del tipo (5), ne viene che le derivate delle θ rispetto alle a sono zero.

Si hanno dunque le equazioni:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial b_j} = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x')\, \theta_{\varrho j}(b). \tag{9}$$

Ora considerando che x'', x', b, sono legate, per mezzo delle (1), fra loro nello stesso modo con cui sono legate fra loro x', x, a, possiamo cangiare nelle (9), x' nelle x; b nelle a, ed ottenere (dopo avere anche cangiati l'indice j in k, e ρ in j) le altre formole:

$$\frac{\partial x_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x)\, \theta_{jk}(a), \tag{B}$$

che rappresentano il secondo dei sistemi di formole fondamentali che noi volevamo trovare.

Dalle (A) e (B) possiamo ricavare altre formole.

Nelle prime delle (1) consideriamo le x come funzioni delle x' e delle a, e deriviamo rispetto ad a_k; si ha:

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial a_k} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h}\frac{\partial x_h}{\partial a_k},$$

che colle formole (A) e (B) diventa:

$$0 = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x')\, \psi_{jk}(a) + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_h} \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x)\, \theta_{jk}(a). \tag{C}$$

Questo è un sistema di equazioni alle derivate parziali delle x' rispetto alle x.

Il sistema (C) può trasformarsi in un altro nel quale in luogo di comparirvi le derivate delle x' rispetto alle x, compaiono le derivate rispetto ad x e x' di una funzione *generica* F di tali variabili. Basterà moltiplicare (C) per $\frac{\partial F}{\partial x'_i}$ e indi fare il sommatorio rispetto ad i, ed osservare che:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x_h} = \frac{\partial F}{\partial x_h};$$

si ha così:

$$\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \theta_{jk}(a) \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad (D)$$

(dove si noti che per maggiore simmetria abbiamo nel secondo termine sostituito l'indice i all'indice h, che vi risultava direttamente).

È utile ora, per far vedere la portata delle precedenti equazioni, sviluppare il seguente esempio semplicissimo, adoperato anche da Lie (*Th. der Transf.*, *I*, *pag. 34 e 43*).

Si abbia il gruppo:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

a tre parametri essenziali (v. anche § 1).

Le derivate della x' rispetto alle a, sono:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_2 x + a_3}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_2} = - \frac{x(x + a_1)}{(a_2 x + a_3)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_3} = - \frac{x + a_1}{(a_2 x + a_3)^2},$$

le quali possono porsi sotto la forma:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x' - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} x'^2$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_3} = - \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x' + \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'^2,$$

da cui appare che tali derivate possono esprimersi, come appunto mostrano le formole (A), come somme di prodotti di funzioni di sole a, per funzioni di sole x', e queste funzioni ξ di sole x' *sono le stesse* per tutte tre le derivate; propriamente nel nostro caso esse sono:

$$\xi_{11}(x') = 1, \quad \xi_{21}(x') = x', \quad \xi_{31}(x') = x'^2.$$

Se ora calcoliamo, invece delle derivate di x' rispetto alle a, quelle di x, troveremo che queste possono porsi sotto la forma:

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_3} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x,$$

cioè tali derivate possono esprimersi anch'esse, come appunto mostrano le formole (B), come somme di prodotti di altre funzioni delle a, per *le medesime funzioni* ξ delle sole x.

Le equazioni differenziali sopra trovate non sono, come abbiamo già detto sul principio di questo §, sufficienti per determinare *un gruppo.* A mostrare ciò basterà il seguente esempio: si abbiano le trasformazioni:

$$x'_1 = x_1 + x_2 + a_1$$
$$x'_2 = x_1 - x_2 + a_2,$$

le quali, com'è facile verificare, non formano un gruppo. Intanto le precedenti x' sono integrali del sistema di equazioni:

$$\frac{\partial x'_1}{\partial a_1} = 1 \qquad \frac{\partial x'_2}{\partial a_1} = 0$$
$$\frac{\partial x'_1}{\partial a_2} = 0 \qquad \frac{\partial x'_2}{\partial a_2} = 1,$$

che sono equazioni della forma (A).

§ 5. — Gruppi ad un sol parametro.

Vogliamo ora passare a costruire sotto una forma generale le trasformazioni relative ad un gruppo contenente un solo parametro essenziale, a.

Prendiamo le mosse dalle equazioni:

$$\frac{dx'_h}{da} = \xi_h (x'_1 \ldots x'_n) \psi (a) \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

cui, secondo le equazioni generali (A) del paragrafo precedente, devono soddisfare le equazioni del gruppo ad un sol parametro; ammettiamo che

la ψ sia definita in tutto il campo $((a))$, in cui anche non abbia naturalmente mai valore infinito.

Gli integrali di questo sistema di n equazioni differenziali ordinarie, dove le funzioni ignote sono le x', e la variabile indipendente è a, rappresenteranno le richieste formole di trasformazione, *purchè le trasformazioni corrispondenti formino un gruppo;* questa osservazione è necessaria per il fatto che le (1), come sappiamo, non rappresentano condizioni *sufficienti* per definire il gruppo. Nelle equazioni generali (A) del § 4, le x' figurano come funzioni delle x e delle a, ma le x, nella formazione delle (A) rappresentano delle costanti, perchè nelle (A) non figurano che solo le derivate delle x' rispetto alle a. Di qui ricaviamo che le costanti che compariranno dall'integrazione del sistema (1), dovranno avere per noi lo stesso ufficio che le x nelle cercate formole di trasformazione, quindi tali costanti le chiameremo $x_1, \ldots x_n$. Ora domandiamo: gli integrali del sistema (1) sono funzioni determinate delle n costanti o no? evidentemente no, inquantochè è chiaro che se in luogo di ciascuna di queste poniamo delle arbitrarie funzioni di altre n costanti, con la sola condizione che queste funzioni non sieno dipendenti, otterremo gli n integrali che dipenderanno dalle costanti in un modo diverso di prima. Ciò mostra che le richieste formole di trasformazione, che noi dobbiamo ottenere come integrali del sistema (1), non sono, senz'altro, determinate come funzioni delle x.

Ma se noi assegniamo il modo col quale le x'_i devono dipendere dalle costanti x, per un deter-

minato e arbitrario valore a^0 della variabile a, allora esse restano determinate in modo unico, in quanto dipendono dalle x. Giacchè chiamando per un momento $c_1, c_2, \ldots c_n$ le costanti degli integrali del sistema (1), e supposto che, risolvendo questi rispetto alle x'_i, si sia trovato:

$$x'_i = \varphi_i (c_1 \ldots c_n, a),$$

e che si voglia in luogo delle c introdurre altre n costanti $x_1 \ldots x_n$, in maniera che per $a = a^0$, le φ_i diventino delle funzioni assegnate $f_i (x_1 \ldots x_n, a^0)$, basterà evidentemente porre le n relazioni:

$$\varphi_i (c_1 \ldots c_n, a^0) = f_i (x_1 \ldots x_n, a^0),$$

e da queste ricavare le c in funzione delle x.

Naturalmente il valore a^0 deve essere tale che il determinante funzionale delle φ rispetto alle c non sia zero, e che quindi la detta risoluzione possa farsi; altrimenti le equazioni:

$$x'_i = \varphi_i (c_1 \ldots c_n, a),$$

per tal valore di a, non potrebbero risolversi rispetto alle c, e quindi esse non rappresenterebbero, per tal valore di a, il sistema degli integrali generali di (1).

Si vede dunque che per determinare le formole di trasformazione del richiesto gruppo, basta fissare le funzioni $x'_i = f_i$ per un determinato valore di a, cioè fissare una trasformazione che a quel gruppo debba appartenere; ciò fatto resta poi ancora a verificare se le trasformazioni così ottenute formano un gruppo. Ora noi fisseremo che *il richiesto gruppo possegga la trasformazione*

identica; vedremo di qui a poco in che modo possiamo analiticamente tener conto di questa condizione.

Dalle formole (1) si ottengono le altre:

$$\frac{d x'_1}{\xi_1} = \frac{d x'_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{d x'_n}{\xi_n} = \psi(a)\, d a, \qquad (2)$$

e gli integrali del sistema delle $n-1$ equazioni differenziali costituite dall'eguaglianza dei primi n rapporti, sieno (risoluti rispetto alle costanti, che per ora chiameremo $c_1, \ldots c_{n-1}$):

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 \quad (x'_1 \ldots x'_n) = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{n-1}(x'_1 \ldots x'_n) = c_{n-1}. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Resta a trovare un ultimo integrale del sistema (2); per ciò fare osserviamo che dovendo le costanti in (3) essere indipendenti, non sarà possibile che sieno zero *tutti* gli n determinanti funzionali delle $\Omega_1 \ldots \Omega_{n-1}$ rispetto ad $n-1$ delle variabili x', giacchè, se ciò fosse, fra le Ω si potrebbero eliminare tutte le n x', e resterebbe una relazione fra le c.

Sia $\frac{\partial(\Omega_1 \ldots \Omega_{n-1})}{\partial(x_1' \ldots x'_{n-1})}$ uno di tali determinanti diversi da zero, e ricaviamo dalle (3) i valori di $x'_1 \ldots x'_{n-1}$ in funzione di x'_n e delle costanti. Sostituendo tali valori nella $\xi_n(x_1' \ldots x'_n)$ contenuta nell'equazione:

$$\frac{d x'_n}{\xi_n} = \psi(a)\, d a,$$

questa diventa un'equazione differenziale ordinaria a due variabili separate, ed integrata dà una espressione del tipo:

$$\Omega\,(x'_n\, c_1 \ldots c_{n-1}) = \int^{a} \psi\,(a)\, d\, a + c_n\,,$$

e sostituendo per $c_1 \ldots c_{n-1}$ i loro valori dati da (3) si ha infine:

$$\Omega_n\,(x'_1 \ldots x'_n) = \int^{a} \psi\,(a)\, d\, a + c_n\,. \qquad (4)$$

Ora introduciamo l'ipotesi che il gruppo contenga la trasformazione identica per un certo valore a^0 di a, e per comodità, mutiamo il valore della costante c_n, cioè scriviamo in luogo di essa:

$$c_n - \int^{a^0} \psi\,(a)\, d\, a,$$

e scriviamo in conseguenza la (4) sotto la forma:

$$\Omega_n\,(x'_1 \ldots x'_n) = \int_{a^0}^{a} \psi\,(a)\, d\, a + c_n\,. \qquad (5)$$

Dobbiamo porre le c eguali a tali funzioni delle x, che per $a = a^0$, le (3) e (5) dieno:

$$x'_i = x_i\,;$$

ma ponendo:

$$c_1 = \Omega_1\,(x_1 \ldots x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = \Omega_n\,(x_1 \ldots x_n),$$

si ottiene proprio quanto si è detto, dunque restano trovate così le c funzioni delle x, in maniera da soddisfare alle condizioni suindicate.

Le formole di trasformazione restano perciò le seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1(x'_1 \dots x'_n) = \Omega_1(x_1 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_{n-1}(x'_1 \dots x'_n) = \Omega_{n-1}(x_1 \dots x_n) \\ \Omega_n(x'_1 \dots x'_n) = \Omega_n(x_1 \dots x_n) + \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, d\, a. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Poniamo ora:

$$t = \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, d\, a.$$

Essendo per ipotesi $\psi(a)$ una funzione *regolare* in tutto il campo $((a))$, ed essendo a^0 un punto di tal campo, la ψ sarà sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $(a - a^0)$ in tutto un certo intorno di a^0, *supponendo inoltre che a^0 sia un punto interno al campo e non situato sul suo contorno.*

Allora l'integrale t sarà definito per tutto un certo intorno di a^0, e *supponiamo inoltre che questo intorno sia tale che in esso a si possa considerare funzione monodroma di t, e t di a.*

Veniamo così ad operare nel detto intorno di a^0, che corrisponderà poi a sua volta ad un intorno di $t = 0$, una trasformazione di parametri.

Le trasformazioni il cui parametro è nell'intorno di a^0, verranno trasformate in altre il cui parametro t è nell'intorno di zero; la trasformazione identica si otterrà per $t = 0$. Per le ipotesi fatte sulla natura di t, girando intorno ad a^0, colla variabile t si dovrà girare intorno $t = 0$, cioè il campo attorno $t = 0$ che corrisponde a quello attorno $a = a^0$, dovrà contenere nel suo interno il punto zero.

Le formole (6) potranno porsi sotto la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1(x') \quad = \Omega_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_{n-1}(x') = \Omega_{n-1}(x) \\ \Omega_n(x') \quad = \Omega_n(x) + t\,; \end{array}\right\} \quad (7)$$

le trasformazioni individuate da queste formole coincidono con quelle del supposto gruppo, solo, in generale, per tutti i valori di t in un certo intorno di $t = 0$.

Ma consideriamo ora le equazioni (7) in sè, cioè senza riguardo al supposto gruppo avente i parametri a; e facciamo percorrere a t tutti i possibili valori. È chiaro che le (7) allora formano un gruppo.

In effetti consideriamo la trasformazione col parametro t_1 e quella col parametro t_2; moltiplicandole fra di loro, il che equivale, al solito, a scrivere le seconde colle variabili x'' e x', e indi eliminare le x' fra i due sistemi di formole così ottenute, si ha un sistema di formole fra x'' e x, analogo al (7), ma dove si è fatto $t = t_1 + t_2$, si

ha cioè un'altra delle trasformazioni generali comprese in (7).

Il gruppo ad un sol parametro che siamo così venuti a costruire, lo chiameremo, per brevità, *gruppo canonico*, intendendo cioè per tale il gruppo dato dalle (7) quando t percorre *tutti* i possibili valori. Esso gode di alcune proprietà rimarchevoli che passeremo brevemente a dimostrare.

Abbiamo visto che la trasformazione prodotto di due altre, ha per parametro la somma $t_1 + t_2$ dei parametri delle due trasformazioni date; ciò mostra subito, poichè il valore $t_1 + t_2$ è indipendente dall'ordine dei termini, che il prodotto di due trasformazioni è indipendente dall'ordine dei fattori, cioè che *due trasformazioni del gruppo sono sempre permutabili.*

Inoltre potendo il parametro t acquistare tutti i possibili valori (reali o complessi), ne viene che *di ogni trasformazione* (cui corrisponde il parametro $t = t_1$) *esiste nel gruppo l'inversa* (cui corrisponde il parametro $-t_1$).

Infine considerando il gruppo dato dalle formole:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 \\ y'_2 &= y_2 \\ &\cdots\cdots \\ y'_{n-1} &= y_{n-1} \\ y'_n &= y_n + t \end{aligned}$$

(che si chiama per un ovvia ragione, *il gruppo delle traslazioni*), è evidente, ricordando la definizione di simiglianza dei gruppi data nel § 2, *che il nostro gruppo è simile a questo delle traslazioni.*

Il gruppo qui considerato, come abbiamo già detto, coincide con quello dato, solo per tutte quelle trasformazioni di un intorno di $t = 0$, che corrisponde ad un intorno di $a = a^0$; è evidente quindi che le medesime proprietà qui indicate, saranno possedute anche dalle trasformazioni del gruppo dato, purchè ci limitiamo di queste a considerare solo quelle in un certo intorno della trasformazione identica. In effetti qualunque sia questo intorno, purchè, come abbiamo supposto, contenga *internamente* il punto a^0, si può sempre trovarne in esso un altro in modo che l'intorno corrispondente di $t = 0$, se contiene il punto t_1, contiene anche il punto $-t_1$, e inoltre contenendo t_1 e t_2, il punto $t_1 + t_2$ sia sempre compreso nell'antico intorno più ampio.

Possiamo dunque dire:

Sia dato un gruppo ad un parametro solo, a, il quale debba percorrere tutti i punti di un certo campo $((a))$, ed il gruppo contenga la trasformazione identica, e propriamente per un valore a^0 (di a) interno ad $((a))$; allora, per tutte le trasformazioni di un certo intorno della identica, si verificano le proprietà: 1.° *che esse possano mettersi sotto la forma* (7), 2.° *che le trasformazioni stesse sono permutabili,* 3.° *che di ogni trasformazione esiste nel gruppo anche la inversa,* 4.° *che con un opportuno cangiamento di variabili, le formole di trasformazione si possono far coincidere con quelle del gruppo delle traslazioni.*

Se ammettiamo che si tratti di un *gruppo di* Lie (v. § 2) *contenente la trasformazione identica,* allora a^0 deve essere certamente *interno* al campo

$((a))$, e quindi *per un tal gruppo valgono tutte le proprietà qui indicate.*

Se ora invece escludiamo che si tratti di *un gruppo di* Lie e supponiamo che il campo $((a))$ relativo all'assegnato gruppo sia limitato in modo che il punto a^0 stia sul suo *contorno* (ciò potendo dipendere anche dal nostro arbitrio nel limitare la variabilità di a, pur conservando la proprietà che le trasformazioni formino un gruppo), e se ammettiamo che l'integrale t sia definito per un certo campo compreso in $((a))$, e avente a^0 sul suo contorno, allora possiamo fare le stesse considerazioni che dianzi, e ottenere gli analoghi risultati, salvochè allora potrà darsi che l'intorno di $t=0$, di cui si è parlato disopra, ha sul suo contorno il punto zero, e quindi allora non potrà più dirsi che, se esso contiene il punto t_1, contiene anche il punto $-t_1$; perciò allora non potrà più dirsi che sussisterà la proprietà della esistenza, nel gruppo, della inversa di ogni trasformazione scelta in un opportuno intorno della identica.

Come esempio di ciò possono considerarsi i gruppi dati dalle medesime formole (7), ma dove si disponga che t non debba acquistare tutti i possibili valori, ma solo, p. es., tutti i valori reali positivi, ovvero tutti i valori reali negativi (compreso sempre lo zero), ecc. Si hanno allora, come è facile riconoscere, sempre dei gruppi, contenenti la trasformazione identica, ma la proprietà suindicata non sussiste più.

Le considerazioni precedenti sono servite a trovare una certa forma canonica semplice, non per tutte le trasformazioni di un gruppo ad un sol parametro, ma solo per quelle appartenenti ad un certo intorno della identica.

Analoghi sviluppi e considerazioni possono farsi anche per tutte le trasformazioni di un certo intorno, non della trasformazione identica, ma di una qualunque del gruppo. Supponiamo che a^0 non rappresenti più, come avanti, il parametro della trasformazione identica, sulla quale ora non facciamo neanche l'ipotesi dell'esistenza, e per evitare confusioni poniamo perciò a' in luogo di a^0 nei calcoli precedenti. Per calcolare allora, come sopra, le formole delle trasformazioni in un intorno di a', dobbiamo determinare nelle (3), (5), (nella quale ultima si sia posto a' in luogo di a^0) le $c_1, \ldots c_{n-1}, c_n$, in maniera che per $a = a'$ la trasformazione che ne risulta, sia quella assegnata, cioè:

$$x'_i = f_i\,(x_1 \ldots x_n).$$

Supposto che per tali valori delle x', le funzioni $\Omega_1 \ldots \Omega_n$ diventino rispettivamente $\omega_1 \ldots \omega_n$ funzioni delle x, è evidente che le c resteranno eguali a tali ω, cioè si avrà (introducendo poi anche t come sopra):

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1\,(x') = \omega_1\,(x) \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \Omega_n\,(x') = \omega_n\,(x) + t, \end{array}\right\} \qquad (8)$$

e queste potranno considerarsi come la forma ca-

nonica per tutte quelle trasformazioni del gruppo che appartengono ad un opportuno intorno della trasformazione col parametro a'. Per $t=0$, cioè $a=a'$, le (8) diventano:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1(x') = \omega_1(x) \\ \cdots\cdots \\ \Omega_n(x') = \omega_n(x) \end{array}\right\} \quad (9)$$

che equivarrà alla assegnata trasformazione.

Consideriamo ora le trasformazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1(x'') = \Omega_1(x') \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Omega_n(x'') = \Omega_n(x') + t \end{array}\right\} \quad (10)$$

che sono quelle di un gruppo avente la trasformazione identica per $a=a'$; è evidente che il prodotto delle (9) per le (10) dà le (8), quindi possiamo asserire:

Dato un gruppo ad un sol parametro, quelle fra le sue trasformazioni che sono nell'intorno di una qualunque di esse, possono sempre considerarsi come prodotti di questa per le trasformazioni di uno di quei gruppi chiamati di sopra gruppi canonici.

Sviluppiamo ora il seguente esempio semplice: Sia il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d\,x'_1}{d\,a} = x'_1\,\frac{1}{a}$$

$$\frac{d\,x'_2}{d\,a} = 2\,x'_2\,\frac{1}{a}.$$

Integrando, e ponendo:

$$t = \int_{a^0}^{a} \frac{d\,a}{a} = \log \frac{a}{a^0},$$

si hanno le equazioni:

$$\frac{x'_2}{x'^2_1} = c_1,$$

$$\log x'_1 = c_2 + t,$$

e ponendo:

$$c_1 = \frac{x_2}{x_1^2}$$

$$c_2 = \log x_1,$$

le formole di trasformazione possono scriversi:

$$\frac{x'_2}{x'^2_1} = \frac{x_2}{x_1^2}$$

$$\log x'_1 = \log x_1 + \log \frac{a}{a^0},$$

e risolvendo rispetto ad x'_1 e x'_2, risulta:

$$x'_1 = \frac{a\,x_1}{a^0}$$

$$x'_2 = \frac{a^2\,x_2}{x^{02}}.$$

§ 6. Formole esplicite canoniche per le trasformazioni di un gruppo ad un parametro. Trasformazioni infinitesimali.

Partendo dalle formole (1) del paragrafo precedente, noi siamo giunti alle (7), le quali sono in sostanza le formole di tutte le trasformazioni del gruppo appartenenti ad un certo intorno della trasformazione identica. Ma noi ora vogliamo trovare queste medesime formole sotto una forma diversa, e propriamente in modo che esse sieno risolute rispetto alle x', le quali così restino sviluppate in serie ordinate secondo le potenze intere, positive, crescenti di t.

Le equazioni (1) del § prec., coll'introduzione di t, diventano:

$$\frac{d\,x'_i}{d\,t} = \xi_i\,(x'). \tag{1}$$

Per $t = 0$, le x', giusta la nostra ipotesi, diventano eguali alle x, quindi possiamo scrivere:

$$\left[\frac{d\,x'_i}{d\,t}\right]_{t=0} = \xi_i\,(x)$$

$$\left[\frac{d^2\,x'_i}{d\,t^2}\right]_{t=0} = \left[\frac{d\,\xi_i\,(x')}{d\,t}\right]_{t=0} = \sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial\,\xi_i\,(x')}{\partial\,x'_h}\frac{d\,x'_h}{d\,t}\right]_{t=0} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \xi_h\,(x)\,\frac{\partial\,\xi_i\,(x)}{\partial\,x_h}\,.$$

Quindi ponendo in generale:

$$X f = \sum_{h=1}^{n} \xi_h (x) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

si ha:

$$\left[\frac{d x'_i}{d t}\right]_{t=0} = X x_i$$

$$\left[\frac{d^2 x'_i}{d t^2}\right]_{t=0} = X \xi_i (x) = X X x_i \equiv X^2 x_i .$$

Similmente si avrebbe:

$$\left[\frac{d^3 x'_i}{d t^3}\right]_{t=0} = X^3 x_i ,$$

. . . .

$$\left[\frac{d^k x'_i}{d t^k}\right]_{t=0} = X^k x_i ,$$

e quindi ricordando l'ordinario sviluppo di Taylor, si ha la formola:

$$x'_i = x_i + t X x_i + \frac{t^2}{2!} X^2 x_i + \ldots \qquad (2)$$

In maniera analoga si può avere lo sviluppo di una qualunque funzione F delle x':

$$F(x') = F(x) + t X (F(x)) + \frac{t^2}{2!} X^2 (F(x)) + \ldots (3)$$

e questa ultima può considerarsi come una formola generale che comprende tutte le (2).

Restano così trovate le richieste formole esplicite per le trasformazioni del gruppo, appartenenti ad un certo intorno della trasformazione identica; le formole (2) possono chiamarsi le formole *canoniche* per le trasformazioni del gruppo.

È importante notare in che modo semplice si può dalle (2) e (3) ottenere le *formole inverse*, cioè quelle che danno le x per mezzo delle x'. Sappiamo che il parametro della trasformazione inversa di quella che ha parametro t, è $-t$; basterà quindi nelle (2) scambiare t con $-t$, e x' con x, per avere la trasformazione inversa, la quale del resto dovendo essere, come sappiamo, anche contenuta nel gruppo, deve essere anch'essa appunto data dalle medesime fermole (2).

L'importanza delle precedenti formole sta principalmente nell'introduzione del simbolo X, il cui studio è intimamente legato con quello delle trasformazioni del gruppo, come appare già dalle (2).

Se noi immaginiamo che t sia infinitamente piccolo, in maniera da poterne trascurare le potenze superiori, otteniamo una trasformazione le cui formole, a meno di infinitesimi di ordine superiore, sono:

$$x'_i = x_i + t\,\xi_i, \tag{4}$$

e questa chiamasi *trasformazione infinitesimale* del gruppo, ed è evidente che *ogni gruppo ad un parametro e contenente la trasformazione identica, contiene sempre una trasformazione infinitesimale.*

Questa è una trasformazione per la quale le x' si alterano di quantità infinitesime proporzionali rispettivamente a:

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_n,$$

che sono precisamente quelle funzioni che entrano nella formazione delle equazioni differenziali (1), e che d'altra parte sono quelle medesime funzioni che servono a costruire il simbolo:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h}. \tag{5}$$

Se vogliamo cercare l'incremento che riceve una funzione qualunque F delle x' per effetto della trasformazione infinitesimale, dalla formola (3) otteniamo immediatamente:

$$\Delta F = F(x') - F(x) = t\, X(F(x)).$$

Da tutto ciò appare evidente l'intimo legame che c'è fra il simbolo X e la trasformazione infinitesimale; è per ciò che tal simbolo si assume ordinariamente come *simbolo* di una trasformazione infinitesimale; quando cioè noi diremo: *sia data la trasformazione infinitesimale* X, intenderemo dire: *sia data quella trasformazione infinitesimale* (4), *i cui coefficienti* ξ *sono gli stessi di quelli che servono a comporre il simbolo* X.

Tenendo presenti le formole (2), si vede che dato il simbolo X, restano fissate le trasformazioni del gruppo in un certo intorno della trasformazione identica, e d'altra parte, dato il gruppo resta a sua volta fissato il simbolo X; possiamo dunque dire che le trasformazioni contenute in un certo intorno finito della identica, di un gruppo a un parametro, contenente la trasformazione identica, sono individuate (in un senso, per ora, affatto formale) dalla trasformazione infinitesimale

del gruppo stesso. Ma possiamo dire qualcosa di più, cioè che ogni trasformazione finita del suddetto intorno si ottiene ripetendo infinite volte la trasformazione infinitesimale, cioè a dire *che il gruppo è generato dalla propria trasformazione infinitesimale*, ciò che appare dalle suesposte formole (2).

Un altro legame più intimo c'è poi ancora fra le trasformazioni del gruppo e il simbolo X, e di questo tratteremo nel prossimo paragrafo.

Notiamo infine che il simbolo X può anche considerarsi come un simbolo di operazione da effettuare su di una funzione f indeterminata. Esso evidentemente gode di molte proprietà del simbolo ordinario di derivazione.

§ 7. Traiettorie di un gruppo ad un sol parametro. Riduzione e forma canonica dei simboli delle trasformazioni infinitesimali. Determinazione del gruppo canonico data la sua trasformazione infinitesimale.

Dato un punto P dello spazio ad n dimensioni, di coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$, applichiamo ad esso tutte le trasformazioni del gruppo ad un sol parametro; le coordinate del punto trasformato saranno date in generale dalle formole:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = f_1(x_1 \ldots x_n, t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = f_n(x_1 \ldots x_n, t), \end{array}\right\} \quad (1)$$

e sono quindi variabili con t; il luogo dei punti trasformati è così in generale una curva, cioè una varietà ∞^1 di punti. Se invece di prendere le mosse dal punto $x_1 \ldots x_n$, si partisse da un altro punto di questa varietà ∞^1, è evidente, per il fatto che le trasformazioni formano un gruppo, che la curva, che si verrebbe in analogo modo a generare, deve essere la stessa di prima. Giacchè supponiamo che con una trasformazione da P si passi al punto P', e poi con un'altra da P a P''; col prodotto delle due si dovrà passare da P a P'', ma il prodotto delle due è un'altra delle medesime, dunque P'' deve essere uno degli ∞^1 punti in cui si trasforma P, cioè deve trovarsi sulla curva generata da P. Si vede così che i punti dello spazio, in rapporto all'assegnato gruppo ad un sol parametro, si distribuiscono su infinite curve, di cui ne passa una e una sola per ciascuno di essi; queste curve si chiamano *le traiettorie del gruppo. Vi sono così* ∞^{n-1} *traiettorie.*

Qual'è la tangente alla traiettoria in un suo punto?

I coseni di direzioni di questa tangente sono evidentemente dati dalle derivate delle x' rispetto a t, per $t = 0$ e queste derivate, per effetto delle equazioni differenziali (1) del § precedente, sono rispettivamente proporzionali alle $\xi_1(x) \ldots \xi_n(x)$, quindi, ciò che era da prevedersi, la suddetta tangente non è altro che la congiungente il punto $x_1 \ldots x_n$, con quello infinitamente vicino che da esso si ottiene con la trasformazione infinitesimale (4) del § precedente.

Cerchiamo ora le relazioni fra le traiettorie e il simbolo X. Le equazioni:

$$\frac{d x_1}{\xi_1(x)} = \frac{d x_2}{\xi_2(x)} = \ldots = \frac{d x_n}{\xi_n(x)}, \tag{2}$$

sono evidentemente le equazioni differenziali delle traiettorie, perchè, ricordando che $d x_1, \ldots d x_n$, sono proporzionali ai coseni di direzione della tangente ad una curva qualunque, esse esprimono appunto che tali coseni di direzione sono proporzionali a $\xi_1, \ldots \xi_n$. Se ora indichiamo per un momento con:

$$\Omega_1(x_1 \ldots x_n) = c_1, \ldots \Omega_{n-1}(x_1 \ldots x_n) = c_{n-1},$$

le equazioni finite delle traiettorie, differenziando, si hanno identicamente le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} d x_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} d x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_1} d x_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_n} d x_n = 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

e sostituendo in queste a $d x_1, \ldots d x_n$, i loro valori proporzionali dati dai denominatori delle (2), si hanno le equazioni:

$$\begin{array}{l} \xi_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_1 \dfrac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial d_1} + \ldots + \xi_n \dfrac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \end{array}$$

cioè le $\Omega_1, \dots \Omega_{n-1}$ sono integrali dell'equazione a derivate parziali, lineare, omogenea, del 1.° ordine:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0. \qquad (4)$$

Un'equazione a derivate parziali di tale specie, non può ammettere più di $n-1$ integrali indipendenti, ciò che si riconosce assai facilmente; * si ha dunque che *gli $n-1$ integrali indipendenti dell'equazione $Xf = 0$, eguagliati a costante, rappresentano appunto le equazioni finite delle traiettorie del gruppo.*

Possiamo anche dire:

Dato un punto e il simbolo X resta in generale individuata una direzione passante per esso, (cioè quella della tangente alla traiettoria) di cui i coseni sono proporzionali ai valori che i coefficienti ξ di X, acquistano nel punto.

Sia dato il simbolo X di una trasformazione infinitesimale, e vogliamo esaminare come esso si

---

* In effetti se ne ammettesse n, si avrebbero le equazioni:

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega_n}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial \Omega_n}{\partial x_n} = 0,$$

e perciò, dovendo essere zero il determinante di tal sistema lineare nelle ξ, il determinante funzionale degli n integrali rispetto alle x, sarebbe zero, e quindi questi sarebbero legati da una relazione.

trasforma introducendo in luogo delle x, altre variabili y legate alle x da relazioni:

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = \varphi_n(x_1 \dots x_n).$$

Osservando che, essendo f una qualunque funzione generica delle x, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_h},$$

è chiaro che si ha:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_h},$$

cioè:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial y_i}{\partial x_h} \right) \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} (X y_i) \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Si vede dunque che il simbolo X *si trasforma in uno della medesima specie*, e che i coefficienti nuovi non sono altro che *i risultati dell'applicazione del medesimo simbolo sulle funzioni che esprimono le nuove variabili mediante le antiche.*

Lasciando ora indeterminata la φ_n, vogliamo prendere le funzioni $\varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$ eguali rispettivamente agli integrali $\Omega_1, \dots \Omega_{n-1}$ dell'equazione $Xf=0$, cioè ai primi membri delle equazioni delle traiettorie; essendo allora:

$$X\Omega_1 = 0, \quad X\Omega_2 = 0 \dots X\Omega_{n-1} = 0,$$

si ha:

$$Xf = X\varphi_n \cdot \frac{\partial f}{\partial y_n},$$

e, se noi determiniamo la φ_n in maniera che sia:

$$X\varphi_n = 1, \tag{5}$$

si ha infine semplicemente:

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial y_n}. \tag{6}$$

Quando X è ridotta, coll'introduzione di nuove variabili, a questa forma, si dice che è ridotta *a forma canonica.* Per completare questa ricerca, resta solo a vedere in che modo dalla (5) si può determinare la φ_n. Ora ciò si fa subito osservando che la (5) è un'equazione a derivate parziali, di 1.° ordine, lineare, non omogenea, e che, secondo la conosciuta teoria di LAGRANGE, l'integrazione di essa dipende da quella di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, che nel nostro caso è:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\varphi_n}{1}, \tag{7}$$

e basterà, per il nostro scopo, conoscere un solo integrale, contenente φ_n, di questo sistema; se quindi consideriamo p. es. l'equazione:

$$d\varphi_n = \frac{dx_n}{\xi_n}, \tag{8}$$

che si ricava da (7), e in questa in luogo di

$x_1, \ldots x_{n-1}$, che compaiono in ζ_n, sostituiamo i loro valori ricavati da:

$$\Omega_1 = c_1, \ldots \quad \Omega_{n-1} = c_{n-1},$$

che essendo integrali del sistema (2), lo sono perciò anche del sistema (7), il quale nei primi n rapporti è lo stesso del (2), otteniamo da (8) una equazione differenziale ordinaria fra φ_n e x_n; integrata questa, e sostituendo poi per $c_1, \ldots c_{n-1}$, i loro valori, si ha la richiesta funzione φ_n di:

$$x_1, x_2, \ldots x_n.$$

Sia data una trasformazione infinitesimale X, e formiamo gli sviluppi in serie:

$$x'_h = x_h + \frac{t}{1} X x_h + \frac{t^2}{2!} X^2 x_h + \ldots \qquad (9)$$

i quali saranno validi in un certo intorno del punto $t = 0$.

A sviluppi di questa specie noi siamo giunti nel § 6, sviluppando in serie nell'intorno di $t = 0$, le x' ricavate dalle formole (7) del § 5, le quali sono, come abbiamo ivi detto, le formole di trasformazione del gruppo canonico.

I procedimenti tenuti nel § 5 possono chiaramente servire a far vedere in che modo, data la X, se ne possono ricavare le equazioni finite del gruppo canonico; però ci sembra utile ripresentare ora quei medesimi calcoli sotto una forma leggermente diversa, e colla quale essi restano anche messi in relazione con le considerazioni ora fatte sulla riduzione a forma canonica dei simboli delle trasformazioni infinitesimali.

Le (9) possono, come si sa, riassumersi nella formola unica (v. § 6):

$$F(x') = F(x) + \frac{t}{1} X(F(x)) + \frac{t^2}{2!} X^2(F(x)) \dots \quad (10)$$

Ora se scegliamo per F delle tali funzioni, che sia identicamente $XF = 0$, essendo allora per conseguenza anche zero le $X^2 F$, $X^3 F, \dots$, ne viene che il secondo membro delle (10) si riduce solo al primo termine e vi resta eliminata la quantità t. Bisognerà dunque scegliere per F degli integrali dell'equazione $XF = 0$, la quale, come si sa, ammette $n - 1$ integrali indipendenti $\Omega_1 \dots \Omega_{n-1}$. Ponendo nella (10) F eguale a ciascuno di questi, si hanno immediatamente le formole:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1(x') \quad = \Omega_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_{n-1}(x') = \Omega_{n-1}(x) \end{array}\right\} \quad (11)$$

le quali sono precisamente le prime $n-1$ delle (7) del § 5, e che possono considerarsi come il risultato della eliminazione di t dalle (9). Resta a trovare l'ultima delle (7) del § 5, e che deve contenere la t. A ciò giungeremo se calcoleremo una tale Ω_n che $X \Omega_n = 1$; infatti allora $X^2 \Omega_n = 0$, $X^3 \Omega_n = 0, \dots$, e dalla (10), posto $F = \Omega_n$, si ha senz'altro:

$$\Omega_n(x') = \Omega_n(x) + t. \quad (12)$$

Si vede quindi che la determinazione di Ω_n corrisponde precisamente alla determinazione so-

pra fatta della funzione φ_n colla quale la X si riduceva a forma *canonica*, nello stesso modo come la determinazione di $\Omega_1 \ldots \Omega_{n-1}$ corrisponde a quella delle funzioni $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ che sono servite alla medesima riduzione. Possiamo per ciò dire che i due problemi: *Ridurre una X a forma canonica*, e: *trovare il gruppo canonico contenente la X data*, si equivalgono perfettamente.

Possiamo inoltre anche dire:

Data una trasformazione infinitesimale X, si può costruire un gruppo (il canonico) ad un sol parametro essenziale, contenente la trasformazione identica e la trasformazione infinitesimale data, contenente inoltre di ogni trasformazione anche la inversa, e di cui le formole di trasformazione nell'intorno della identica possono svilupparsi in serie come le (9), *e quelle invece nell' intorno di una qualunque di esse, p. es., nell'intorno di quella di parametro t_1, si possono comporre come prodotti di quella di parametro t_1 (fissa), per quelle date dalle medesime* (9) *dove si ponga $t - t_1$ in luogo di t.* Quest'ultima proprietà risulta evidentemente da considerazioni analoghe a quelle fatte alla fine del § 5.

È utile notare che la formola generale (10) può scriversi simbolicamente:

$$F(x') = e^{tX} \, . \, F(x),$$

introducendo il simbolo operativo esponenziale e^{tX}, cui si può, per definizione, assegnare uno sviluppo in serie simile a quello che si avrebbe se l'esponente fosse una quantità effettiva.

§ 8. Proprietà varie dei simboli delle trasformazioni infinitesimali e relazioni fra loro. Simbolo di Poisson e formola di Jacobi. Ordine di una trasformazione infinitesimale in un determinato punto.

Si abbiano r trasformazioni infinitesimali:

$$X_1 f = \sum_{h=1}^{n} \xi_{1h} \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_r f = \sum_{h=1}^{n} \xi_{rh} \frac{\partial f}{\partial x_h};$$

se con r arbitrarie funzioni $\lambda_1, \ldots \lambda_r$, formiamo la combinazione:

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_r X_r f,$$

abbiamo evidentemente una espressione del medesimo tipo delle X, cioè il simbolo di un' altra trasformazione infinitesimale. Per ciascuna trasformazione infinitesimale X_s, gli incrementi infinitesimi che ricevono le variabili x_h, sono proporzionali alle quantità ξ_{sh}; per questa nuova trasformazione ottenuta linearmente dalle date, tali incrementi sono proporzionali alle medesime combinazioni lineari delle ξ, cioè alle quantità:

$$\lambda_1 \xi_{1h} + \ldots + \lambda_r \xi_{rh}.$$

Si vede così che combinando *linearmente* i simboli, restano combinati *linearmente* anche gli incrementi che ricevono le x.

Diremo che r trasformazioni infinitesimali sono *semplicemente indipendenti*, quando i loro simboli X non soddisfano ad alcuna relazione lineare del tipo:

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \ldots + e_r X_r f = 0, \qquad (1)$$

dove le e sieno delle quantità non tutte zero, indipendenti dalle x, e diremo poi che le r trasformazioni X sono *assolutamente indipendenti*, quando non esiste alcuna relazione lineare come (1), in cui le e possano essere anche delle qualunque funzioni delle x.

È evidente che se le r X sono assolutamente indipendenti lo saranno anche semplicemente, ma non viceversa. È evidente inoltre che per *l'indipendenza assoluta è necessario e sufficiente che la matrice:*

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \ldots & \xi_{rn} \end{matrix} \right\|$$

sia diversa da zero.

È facile far vedere che, se le variabili sono n, fra $n+1$ simboli di trasformazioni infinitesimali, sussiste sempre UNA RELAZIONE LINEARE *omogenea a coefficienti funzioni delle* x, cioè: $n+1$ *trasformazioni infinitesimali in* n *variabili non possono mai essere assolutamente indipendenti.*

In effetti per la sussistenza del sistema:

$$X_1 f = \xi_{11} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_{n+1} f = \xi_{n+1,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_{n+1,n} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

deve essere zero il determinante:

$$\left\| \begin{matrix} X_1 f & \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n+1} f & \xi_{n+1,1} & \dots & \xi_{n+1,n} \end{matrix} \right\|,$$

e quindi si ottiene appunto una relazione lineare nelle X.

Abbiamo detto alla fine del § 6 che il simbolo X può anche considerarsi come un simbolo operativo, e che gode di molte proprietà dell'ordinario simbolo di derivazione. È evidente infatti che esso gode della proprietà di potersi invertire col simbolo di somma, cioè che si opera su di una somma operandolo su ciascun termine; è evidente anche che esso si opera su di un prodotto colla stessa regola con cui si fa la derivazione di un prodotto, ecc.

Inoltre operiamo il simbolo X su di una funzione composta:

$$f(\varphi, \psi, \dots),$$

dove le $\varphi, \psi, \dots$, sieno funzioni delle x. Non c'è allora che applicare l'ordinario teorema di cal-

colo per ricavare la formola:

$$X f(\varphi, \psi, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} X \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} X \psi + \ldots,$$

analoga a quella per la derivazione di una funzione composta.

Dati due simboli X, non sussiste però la proprietà commutativa, cioè operando prima coll'uno e poi coll'altro, non si ha in generale lo stesso che operando prima col secondo e poi col primo. Indicando con $X_i X_j f$ il risultato di questa doppia operazione fatta su f, non si ha perciò che è zero la differenza:

$$X_i X_j f - X_j X_i f,$$

Questa combinazione fatta coi due simboli X_i, X_j, la indicheremo brevemente col simbolo:

$$(X_i X_j) f, \tag{2}$$

che si suol chiamare *la parentesi di Poisson.*

È importante far vedere che il simbolo (2) è anch'esso del medesimo tipo delle X, cioè è lineare, omogeneo, nelle derivate di 1.° ordine di f, e non contiene quelle di 2.° ordine. Infatti:

$$X_j f = \sum_{h=1}^{n} \xi_{jh} \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

$$X_i X_j f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_{ik} \left(\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_h} + \xi_{jh} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \right),$$

e permutando in questa formola i con j e h con

k, e sottraendo, risulta:

$$(X_i\, X_j) f = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} \xi_{jk} \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x_h} \right) \frac{\partial f}{\partial x_h} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (X_i\, \xi_{jh} - X_j\, \xi_{ih}) \frac{\partial f}{\partial x_h}. \qquad (3)$$

Con ciò è dimostrato il nostro assunto, e si vede poi ancora in che modo sono formati i coefficienti del nuovo simbolo che si viene ad ottenere; essi sono eguali alle differenze dei risultati delle operazioni X_i e X_j rispettivamente sui coefficienti di egual posto in X_j e X_i.

Si può notare la seguente altra formola di facile dimostrazione:

$$\left(\varphi(x) \,.\, X_1 + \psi(x) \,.\, X_2 + \ldots,\, X_3 \right) f =$$

$$= \varphi(x) \,.\, (X_1\, X_3) f + \psi(x) \,.\, (X_2\, X_3) f - \ldots$$

$$- X_3\, \varphi(x) \,.\, X_1 f - X_3\, \psi(x) \,.\, X_2 f - \ldots$$

È notevole inoltre la seguente identità, detta di JACOBI:

$$((X_1\, X_2)\, X_3) + ((X_2\, X_3)\, X_1) + ((X_3\, X_1)\, X_2) = 0.$$

Per dimostrarla osserviamo che:

$$(X_1\, X_2) = X_1\, X_2 - X_2\, X_1,$$

e quindi:

$$((X_1\, X_2)\, X_3) = (X_1\, X_2)\, X_3 - X_3\, (X_1\, X_2) =$$

$$= X_1\, X_2\, X_3 - X_2\, X_1\, X_3 - X_3\, X_1\, X_2 + X_3\, X_2\, X_1.$$

Permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3 e sommando si ha la sopradetta relazione.

Altre identità fra i simboli X, sono quelle contenute nella mia Nota: *Sopra alcune identità fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime* (Rend. Ist. Lomb. (2), v. 34, 1901), ed esse servono per risolvere un problema interessante relativo al prodotto di due trasformazioni finite.

Ci limiteremo qui ad esporre solo il risultato che si ottiene, rimandando per maggiori particolari alla Nota succitata e a quella, che ad essa fa seguito, intitolata: *Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite ecc.* (Rend. Ist. Lomb. (2), v. 34, 1901.)

Si abbiano h simboli $X_1 \ldots X_h$ di trasformazioni infinitesimali, che possiamo supporre tutti fra loro diversi o anche alcuni fra loro eguali. Formiamo i prodotti di essi scambiando l'ordine dei fattori in *tutti* i modi possibili, in modo da ottenere prodotti in generale fra loro diversi; se fra i simboli X ve ne sono α eguali ad X_1, β eguali ad X_2, ecc., in modo che $\alpha + \beta \ldots = h$, il numero dei prodotti fra loro diversi sarà naturalmente $\frac{h!}{\alpha!\beta!}$. La somma di tutti tali prodotti la chiameremo una *somma elementare di operazioni di ordine h*, e le $X_1{}^\alpha$, $X_2{}^\beta \ldots$ le chiameremo *operazioni componenti*.

Il risultato che si deduce dalle considerazioni svolte nella suddetta Nota è contenuto nei seguenti enunciati:

In primo luogo, la operazione di ordine k:

$$\binom{k}{r} X_2^r \, X_1^{k-r}, \tag{4}$$

può esprimersi linearmente mediante somme elementari di ordine k, $k-1$, $k-2, \ldots$; la costruzione di queste e la determinazione dei rispettivi coefficienti numerici si ottiene poi nel seguente modo:

Si formino m parentesi del tipo:

$$\left(X_{i_1}\,(X_{i_2}\ldots(X_{i_s}\,(X_1\,X_2))\ldots)\right) \tag{5}$$

dove gli s indici $i_1 \ldots i_s$, hanno i soli valori 1 e 2, combinati in un modo arbitrario; il numero complessivo v delle X_2 che figurano in questa parentesi non sia però superiore ad r, e il numero complessivo w delle X_1 non superi $k-r$; quindi, poichè almeno una X_2 c'è in ognuna di queste parentesi, si avrà $m \leqq v$, e inoltre $v \leqq r$, $w \leqq k-r$, $m \leqq r$; il numero s e gli indici $i_1 \ldots i_s$ variino *in generale* da una all'altra delle m parentesi costruite, non essendo però escluso che alcune o tutte di queste sieno identiche.

La somma elementare S le cui componenti sono X_1^{k-r-w}, X_2^{r-v}, e le m parentesi (5) *è uno dei termini dello sviluppo che qui si considera, e questo sviluppo si ottiene perciò formando in tutti i modi possibili queste somme elementari S; e facendone una combinazione lineare con coefficienti che resta ora a indicare.*

La somma elementare S è di ordine:

$$k - r - w + r - v + m = k + m - v - w,$$

cioè di ordine:

$$k - t,$$

se porremo $w + v - m = t$; *il coefficiente numerico di S sarà allora:*

$$k(k-1)\dots(k-t+1)\,\Gamma,$$

dove Γ *è una quantità che non dipende da* k, *ma solo dalle operazioni componenti della somma elementare S.*

Si ha quindi:

$$\binom{k}{r} X_2{}^r X_1{}^{k-r} = \sum k(k-1)\dots(k-t+1)\,\Gamma\,.\,S, \quad (6)$$

in cui il sommatorio $\sum$ *si estende a tutti i possibili S.*

Resta ora a indicare come si determina Γ.

Consideriamo perciò la serie di operazioni:

$$(X_1 X_2),\ (X_1 (X_1 X_2)),\ (X_1 (X_1 (X_1 X_2))), \dots$$

e ad ognuna di queste facciamo corrispondere ordinatamente uno dei numeri γ', γ'', γ''', ... legati dalla legge di ricorrenza:

$$\gamma^{(s)} = -\left[\frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \dots + \frac{1}{s!}\gamma' + \frac{1}{s+1!}\right];$$

mentre alle operazioni X_1 e X_2 facciamo corrispondere il numero 1, che per analogia indicheremo con $\gamma^{(0)}$. Infine a ciascuna parentesi più generale, cioè come la (5), in cui le X dalla prima sino alla penultima non sono tutte X_1 ma promi-

scuamente X_1 e X_2 si faccia anche corrispondere un numero determinato, il quale è dato da una legge più complessa, e che io ho determinata per alcuni casi, come dirò più sotto. Il risultato per la determinazione di Γ è intanto il seguente:

Il coefficiente numerico Γ *contenuto nella formola* (6) *è eguale al prodotto dei numeri coordinati a ciascuna delle operazioni componenti di* S.

Per semplicità indichiamo con:

$$(X_{i_1}\, X_{i_2} \ldots X_{i_s}\, X_1\, X_2) \qquad (7)$$

il simbolo (5); la determinazione dei numeri coordinati a ciascuna (7) l'ho fatta per tre casi, e cioè: quando $i_1 = i_2 = \ldots = i_s = 1$; quando $i_1 = i_2 = \ldots = i_s = 2$; e infine quando *uno solo* degli indici $i_1, \ldots i_s$ è eguale a 2 e gli altri sono eguali a 1 (v. la mia Nota in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, p. 555).

Il risultato relativo al primo caso è stato enunciato alla pag. precedente; gli altri due sono:

Il numero coordinato a: $\Big(\overbrace{X_2 \ldots X_2}^{n} X_1 X_2\Big)$ *è* $-\gamma^{(n+1)}$,

e quello coordinato a: $\Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{m} X_2\Big)$ *è*:

$$c_{mn} = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{n+r+1}{n} \gamma^{(n+r+1)}\, \gamma^{(m-r)}.$$

Notiamo infine che dei numeri γ tutti quelli di *indice dispari* (meno γ') sono zero, e che essi hanno una facile relazione coi *numeri Bernoulliani* (v. note in fine al volume). I loro valori sono:

$$\gamma' = -\frac{1}{2}, \quad \gamma'' = \frac{1}{12}, \quad \gamma^{\mathrm{IV}} = -\frac{1}{6!}, \ldots\ldots$$

È utile ora introdurre il concetto di *ordine di una trasformazione infinitesimale in un determinato punto.*

Si abbia un punto di coordinate x^0_i, e supponiamo che i coefficienti $\xi_1 \dots \xi_n$ della trasformazione infinitesimale sieno delle funzioni *regolari* in tal punto, cioè a dire che nell'intorno del medesimo, esse possano svilupparsi in serie ordinate secondo le potenze intere positive delle differenze $(x_i - x^0_i)$. Immaginando eseguiti questi sviluppi per tutte le ξ, e sostituiti in:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad (8)$$

raccogliamo insieme i termini del medesimo ordine nelle differenze $(x_i - x^0_i)$, e supposto in generale che sia k l'ordine più basso sotto cui compariscono queste differenze negli sviluppi di tutte le ξ, otterremo la (8) scissa nella somma di tante trasformazioni infinitesimali, di cui la prima ha per coefficienti delle funzioni omogenee intere di grado k nelle differenze $(x_i - x^0_i)$, la seconda ha per coefficienti delle analoghe funzioni, ma di grado $k+1$, e così di seguito; *diremo* che la trasformazione infinitesimale data, la quale sviluppata nel modo detto dà luogo ad uno sviluppo che comincia con termini di ordine k, *è di ordine k relativamente al punto x^0_i che si considera.*

È chiaro che due trasformazioni infinitesimali le quali, rispetto ad un determinato punto, sono di ordine diverso, certamente saranno fra loro *semplicemente* indipendenti (v. pag. 72) e anzi può dirsi

di più: che saranno certamente semplicemente indipendenti due trasformazioni, che sieno del medesimo ordine in un determinato punto, se lo sono i due termini di ordine più basso coi quali cominciano gli sviluppi in serie delle due trasformazioni date.

Supponiamo date due trasformazioni infinitesimali, X e Y, di ordini k e h, per il punto x^0_i, e cerchiamo l'ordine, per il medesimo punto della trasformazione rappresentata dalla parentesi $(X\,Y)$.

Adoperando la formola (3), si vede che i coefficienti di $(X\,Y)$ sono:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\xi_s \frac{\partial \eta_j}{\partial x_s} - \eta_s \frac{\partial \xi_j}{\partial x_s}\right),$$

se ξ, η sono rispettivamente i coefficienti di X e Y.

Ora supposto che le ξ sieno di ordine k nelle differenze $(x_i - x^0_i)$, e che le η sieno di ordine h, poichè le loro derivate saranno rispettivamente di ordine $k-1$ e $h-1$, si ha:

Se gli ordini di X e Y in un punto x^0_i sono rispettivamente k e h, l'ordine della $(X\,Y)$ è almeno $k+h-1$.

È importante notare che *l'ordine k di una trasformazione infinitesimale X in un punto x^0_i non si altera con una trasformazione delle variabili.*

Supponiamo infatti di mutare le variabili x in altre variabili y, con formole:

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \,.\,.\,.\, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = \varphi_n(x_1 \,.\,.\,.\, x_n),$$

le quali abbiano, al solito, la proprietà di potersi risolvere rispetto alle x, cioè che il determinante:

$$\frac{\partial (y_1 y_2 \dots y_n)}{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)},$$

sia diverso da zero, e supponiamo che le y sieno funzioni regolari nel punto $x^0{}_i$, e che quindi si abbiano gli sviluppi:

$$y_j = y^0{}_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} (x_i - x^0{}_i) + \dots \qquad (5)$$

In questi sviluppi le a_i non possono essere tutte zero, anzi non possono neanche essere tutte zero quelle di cui il primo indice sia il medesimo, giacchè il determinante delle a non è altro che il determinante funzionale delle y rispetto alle x, per il punto $x^0{}_i$, e tal determinante funzionale noi lo supponiamo diverso da zero.

Come sappiamo dal § prec. i coefficienti della trasformazione infinitesimale trasformata, sono dati da:

$$X y_j,$$

cioè:

$$\sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial y_j}{\partial x_s},$$

e se indichiamo con $\xi_s^{(k)}$ la parte di ordine k di ξ_s, ed osserviamo che:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_s} = a_{js} + \dots,$$

si ha che i termini di ordine più basso di $X y_j$ sono:

$$\sum_{s=1}^{n} \xi_s^{(k)} a_{js},$$

i quali *non possono essere tutti zero*, perchè altrimenti dovrebbe essere zero il determinante delle a, contro l'ipotesi. Dunque effettivamente l'ordine k non muta.

Noi sappiamo (v. § prec.) che dato un punto e una trasformazione infinitesimale X, resta individuata *in generale* una direzione passante per il punto, e i coseni di questa sono proporzionali ai valori che i coefficienti ξ di X acquistano nel punto. Se ora noi supponiamo che la trasformazione infinitesimale sia, rispetto a quel punto, di ordine maggiore di zero, allora è evidente che tutte le ξ si annullano per quel punto, e quindi la direzione di cui si parla resta indeterminata.

Completando dunque un teorema dato nel § prec., noi possiamo dire che una trasformazione infinitesimale determina una direzione passante per un dato punto, quando essa è di ordine zero per quel punto, ma non più quando è di ordine maggiore di zero. Quando si verifica quest'ultimo caso, noi diremo che *la trasformazione infinitesimale lascia stabile* * *il punto* e quindi possiamo ora enunciare il teorema:

---

* Nell'opera di LIE-ENGEL per indicare questo concetto si dice che la trasformazione infinitesimale « *in Ruhe lässt* » il punto.

Una trasformazione infinitesimale che rispetto ad un punto è di ordine maggiore di zero, lascia stabile quel punto.

§ 9. Formola per il prodotto di due trasformazioni finite date sotto la forma canonica.

Si abbiano due trasformazioni sotto la ordinaria forma canonica (v. pp. 59 e 70):

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= x_i + \frac{t}{1\,!} X_1 x_i + \frac{t^2}{2\,!} X_1{}^2 x_i + \ldots = e^{tX_1} . x_i \\ x''_i &= x'_i + \frac{t'}{1\,!} X_2 x'_i + \frac{t'^2}{2\,!} X^2{}_2 x'_i + \ldots = e^{t'X_2} . x_i \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove le X_1, X_2 sono i simboli di due diverse trasformazioni infinitesimali, e t, t' sono i parametri delle due date trasformazioni finite. Nella seconda di queste formole bisogna intendere naturalmente che la X_2 sia scritta nelle variabili x' anzichè nelle x; trasformando però le x' nelle x possiamo sempre intendere che X_2 sia espressa anch'essa nelle x, come X_1.

Il prodotto delle due trasformazioni (1) potrà naturalmente porsi anch'esso sotto forma canonica, cioè sotto la forma:

$$x''_i = x_i + \frac{1}{1\,!} X_3 x_i + \frac{1}{2\,!} X_3{}^2 x_i + \ldots = e^{X_3} . x_i \qquad (2)$$

e la quistione che ora si presenta naturale, è la

determinazione della trasformazione infinitesimale X_3 la quale dovrà risultare composta mediante le X_1 e X_2. Non è a mia notizia che questo problema sia stato ancora risoluto; di esso ho trattato nella mia Nota intitolata: *Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite ecc.* (Rend. Ist. Lomb. (2), v. 34, 1901.) Se $X_2 = X_1$ la X_3 è uguale alla $(t + t') X_1$; ma noi vogliamo considerare il caso in cui X_2 e X_1 sieno affatto indipendenti l'una dall'altra.

La dimostrazione della formola che otterremo si fonda sulle identità generali riassunte nel precedente paragrafo; ma una volta trovata quella formola, essa, ha il vantaggio di potersi considerare come una fonte unica da cui possano ricavarsi una serie di risultati, che negli studi sulla teoria dei gruppi di trasformazioni sono noti per vie molto diverse fra loro.

Eliminando fra le (1) le x' si ha la formola del prodotto, prima di tutto, sotto la forma:

$$x''_i = x_i + \frac{t}{1!} X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_1^2 x_i + \ldots +$$

$$+ \frac{t'}{1!}\left(X_2 x_i + \frac{t}{1!} X_2 X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_2 X_1^2 x_i + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{t'^2}{2!}\left(X_2^2 x_i + \frac{t}{1!} X_2^2 X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_2^2 X_1^2 x_i + \ldots\right) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

che può scriversi anche:

$$\left.\begin{aligned} x''_i &= x_i + (t X_1 + t' X_2) x_i + \\ &+ \frac{1}{2!}(t^2 X_1^2 + 2 t t' X_2 X_1 + t'^2 X_2^2) x_i + \\ &+ \frac{1}{3!}(t^3 X_1^3 + 3t^2 t' X_2 X_1^2 + 3tt'^2 X_2^2 X_1 + t'^3 X_2^3) x_i + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Per risolvere ora la quistione propostaci dobbiamo cercare di trasformare i termini di 2°, 3°,... ordine in tale formola in modo che ridotti ad una somma di termini di ordine diverso, e raggruppati poi tutti i termini del medesimo ordine, risulti che l'assieme di tutti quelli di ordine k sia esattamente, a meno del fattore $\frac{1}{k!}$, la k^{ma} potenza della somma di quelli di primo ordine.

Un termine qualunque di ordine k della formola (3) è dato, a meno del fattore $\frac{1}{k!} t^{k-r} t'^r$, dal risultato della operazione:

$$\binom{k}{r} X_2^r X_1^{k-r}, \qquad (4)$$

applicata su x_i.

Ora applichiamo a ciascun termine come (4) il teorema del § prec. (pp. 77-79) facciamo variare k da 2 a ∞, ed r da 0 a k, e raccogliamo tutti i termini di un determinato ordine p. es. k.

Un primo termine di ordine k risulta dallo sviluppo di quelli che si presentano di ordine k nella

formola (3), ed è:

$$\frac{1}{k!} t^{k-r} t^{r} S(X_1^{k-r};\ X_2^{r}),$$

intendendo con:

$$S(X_1^{k-r};\ X_2^{r}),$$

la somma elementare di cui le componenti sono X_1^{k-r} e X_2^{r}. Facendo variare r da 0 a k, si ha:

$$\frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} t^{k-r} t'^{r} S(X_1^{k-r};\ X_2^{r}). \tag{4}$$

Ora questa espressione non è altro che:

$$\frac{1}{k!} [t X_1 + t' X_2]^{k},$$

quando questa k^{ma} potenza si esegue non ammettendo, naturalmente, che si abbia la commutatività del prodotto di X_1 per X_2.

Un secondo termine di ordine k risulta dallo sviluppo di quelli che si presentano di ordine $k+1$ nella formola (3) ed è:

$$\frac{1}{(k+1)!} t^{k-r} t'^{r+1} (k+1) \gamma' S(X_2^{k-r-1};\ X_2^{r};\ (X_1 X_2)),$$

intendendo con $S(X_1^{k-r-1}; X_2^{r}; (X_1 X_2))$ la somma elementare di cui le componenti sono:

$$X_1^{k-r-1},\quad X_2^{r},\quad (X_1 X_2),$$

ed essendo, come sappiamo, $(k+1)\ \gamma'$ il coefficiente di una tale S. Facendo variare r da 0 a

$k-1$ si ha in complesso:

$$\frac{1}{k!}\gamma' \sum_{r=0}^{k-1} t^{k-r-1} . t'^{r} . t t' . S(X_1^{k-r-1}; X_2^r; (X_1 X_2)). \quad (5)$$

Similmente dai termini che si presentano di ordine $k+2$ in (3), colla solita decomposizione si avrebbero, fra gli altri, i seguenti:

$$\frac{1}{(k+2)!} t^{k-r-1} t'^{r+2} (k+2)(k+1)\gamma'^2 \times$$
$$\times S(X_1^{k-r-2}; X_2^r; (X_1 X_2)^2),$$

e sommando da $r=0$ ad $r=k-2$ si ha:

$$\frac{1}{k!}\gamma'^2 \sum_{r=0}^{k=2} t^{k-r-2} . t'^{r} . t^2 t'^2 S(X_1^{k-r-2}; X_2^r; (X_1 X_2)^2), \quad (6)$$

e così di seguito.

Ora la somma delle (4) (5) (6) *e delle analoghe seguenti non è altro che:*

$$\frac{1}{k!}[t X_1 + t' X_2 + \gamma' t t' (X_1 X_2)]^k,$$

quando al solito si intende eseguita questa k^{ma} potenza tenendo conto che non esiste la commutatività dei prodotti di X_1 per X_2 per $(X_1 X_2)$.

Le considerazioni qui fatte bastano per far comprendere che il problema che ci siamo proposto, cioè la determinazione della trasformazione infinitesimale X_3 della formola (2), resta risoluto mediante la decomposizione generale di cui abbiamo trattato nel precedente paragrafo (pp. 77-79).

Senza indugiarci in altre parole e in altre considerazioni, che non avrebbero alcuna sostanziale differenza da quelle fatte di sopra, possiamo conchiudere che *la trasformazione infinitesimale* X_3 *relativa al prodotto delle due assegnate trasformazioni finite è data dalla formola:*

$$\left.\begin{aligned} X_3 = t X_1 + t' X_2 + t' \sum_{n=1}^{\infty} t^n \gamma^{(n)} \Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2\Big) + \\ + t'^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^{m+n} c_{mn} \Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{m} X_2\Big) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

di cui ogni termine è una trasformazione infinitesima del tipo (7) *del § prec., e questa è moltiplicata per quel coefficiente numerico che è ad essa coordinato secondo il teorema dello stesso §, e per* t *e* t' *elevate a potenze eguali rispettivamente ai numeri delle volte che* X_1 *e* X_2 *compaiono nella sua espressione.*

I numeri γ con indice dispari sono zero $\left(\text{meno } \gamma' \text{ che è eguale a } -\frac{1}{2}\right)$, gli altri sono determinati dalla formola di ricorrenza:

$$\gamma^{(2n)} + \frac{1}{3!} \gamma^{(2n-2)} + \frac{1}{5!} \gamma^{(2n-4)} + \ldots\ldots + \\ + \frac{1}{2n-1!} \gamma'' - \frac{2n-1}{2 \cdot (2n+1)!} = 0,$$

e i coefficienti c_{mn} si esprimono mediante i γ colla formola (v. pag. 79):

$$c_{mn} = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{n+r+1}{n} \gamma^{(n+r+1)} \gamma^{(m-r)}.$$

§ 10. Le espressioni Xf considerate come primi membri di equazioni a derivate parziali. Sistemi completi di equazioni $Xf = 0$.

Eguagliando a zero una espressione Xf:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

si ha una equazione a derivate parziali, di primo ordine, lineare, omogenea, nei cui coefficienti non entra la funzione incognita f.

Supposto che si abbia un sistema di r di tali X, si ha un sistema di r equazioni:

$$X_1 f = 0, \ldots\ldots X_r f = 0 \tag{1}$$

della specie suindicata.

Fra le proprietà delle espressioni X, e quelle degli integrali soluzioni comuni di questo sistema, sussistono alcune relazioni che vogliamo passare ad esporre.

Prima di tutto è chiaro che se vogliamo trattare delle soluzioni comuni del sistema, sarà inutile considerare quelle X le quali possono esprimersi linearmente (con coefficienti anche variabili, cioè funzioni di x) per mezzo di altre del medesimo sistema, giacchè le corrispondenti equazioni, essendo sempre soddisfatte dalle soluzioni comuni alle altre, non possono portare alcuna influenza sul problema che ci occupa.

Immagineremo dunque che fra le X non sussista alcuna relazione lineare a coefficienti qualunque, variabili o no.

È chiaro inoltre che r *deve essere minore di* n, *perchè il sistema* (1) *ammetta una soluzione diversa dalla soluzione evidente:*

$$f = \text{cost.}$$

Giacchè se r fosse eguale o maggiore di n, per la loro coesistenza per una medesima f, di cui le derivate non sieno tutte zero, e che quindi non sia $f = \text{cost.}$, bisognerebbe che la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1} & \dots & \xi_{rn} \end{Vmatrix}$$

sia identicamente zero, cioè che tutti i determinanti di ordine n, in essa compresi, sieno zero, e di qui, per proprietà note dei determinanti nulli, si ricaverebbe che gli elementi di una linea sarebbero le medesime combinazioni lineari degli elementi delle altre linee, il che è contro l'ipotesi della indipendenza lineare delle (1).

Se formiamo la combinazione:

$$(X_i\, X_j)\, f = 0 \tag{2}$$

otteniamo una nuova equazione della medesima specie, ed è facile dimostrare che *essa è soddisfatta dalle medesime* f *che soddisfano le equazioni*:

$$X_i\, f = 0 \quad \text{e} \quad X_j\, f = 0;$$

giacchè se f è soluzione comune di queste due, sarà anche identicamente:

$$X_i X_j f = 0 \quad \text{e} \quad X_j X_i f = 0$$

e quindi anche:

$$(X_i X_j - X_j X_i) f = (X_i X_j) f = 0.$$

Da ciò risulta una conseguenza importante:

Può avvenire che l'equazione $(X_i X_j) f = 0$ sia una combinazione lineare delle (1), e allora sarà inutile considerarla; ma può avvenire anche che essa non sia combinazione lineare delle (1), e allora, se noi la aggreghiamo al sistema (1), ciò non modificherà le soluzioni comuni, perchè la nuova equazione aggiunta è soddisfatta dalle medesime funzioni che soddisfanno le primitive. Onde aggregando alle (1) tutte le possibili (2) che non sieno combinazioni lineari delle precedenti, e indi sul sistema così ampliato, operando similmente, e così di seguito, verremo ad ottenere infine un sistema composto di un maggior numero di equazioni, fra le quali non sussiste alcuna relazione lineare, ma di cui le soluzioni comuni sono precisamente le stesse di quelle che erano riguardo al semplice sistema dato.

Procedendo nel modo indicato, si dovrà necessariamente giungere a costruire, dal dato, un sistema tale che formando su esso tutte le combinazioni (2), si hanno sempre equazioni che sono combinazioni lineari di quelle del sistema; giacchè se ciò non avviene, continuando il procedimento, si giungerà certamente ad ottenere un numero di equazioni eguale o maggiore di n, e al-

lora l' unica soluzione comune del sistema è la soluzione $f = \text{cost}$.

Possiamo dunque conchiudere che *si potrà sempre costruire un sistema tale che tutte le* $(X_i X_j)$ *sieno combinazioni lineari delle* X.

Un sistema di tale specie lo chiameremo *completo: si può dunque rendere sempre completo un sistema dato*, e perciò si potrà sempre supporre, per la ricerca delle soluzioni comuni, che il sistema (1) sia completo.

Se i primi membri delle equazioni del sistema sono *assolutamente indipendenti* (v. pag. 72), diremo che il sistema completo è irreducibile.

Noi non possiamo entrare nella trattazione dettagliata di questo problema, la cui teoria appartiene a quella dei sistemi di equazioni a derivate parziali, e che si collega strettamente con la teoria delle equazioni ai differenziali totali di primo ordine; solo ricorderemo qui il risultato della ricerca, della quale si sono occupati DEAHNA (*Crelle*, 20), NATANI (*Crelle*, 58), AD. MAYER (*Math. Ann.*, 5), FROBENIUS (*Crelle*, 82), ecc.

Il risultato è che: *un sistema completo irreducibile di* r *equazioni come le* (1), *ad* n *variabili, ammette sempre* $n - r$ *integrali indipendenti, con altrettante costanti additive.*

Sono poi facili a dimostrare i seguenti teoremi, su cui per brevità non ci fermeremo:

Da un sistema completo, operando un cangiamento di variabili si ha ancora un sistema completo.

Se si ha un sistema completo e ad un assieme di alcune o tutte le sue equazioni si sostituisce un

assieme equivalente (cioè le cui equazioni sieno combinazioni lineari indipendenti delle antiche) si ha ancora un sistema completo.

Dato un sistema completo di r equazioni ed una funzione $\psi(x_1 \dots x_{n-r})$ *di* $n-r$ *delle variabili, si può sempre trovare un integrale tale che per* $x_{n-r+1}=\alpha_1, \dots x_n=\alpha_r$, *l'integrale si riduca a quella funzione* ψ *delle altre variabili.*

Se u è un integrale del sistema completo, e $v_1\, v_2 \dots v_s$ *sono altri s integrali indipendenti tra loro e da u, ricavando dalle equazioni* $v_1=c_1 \dots v_s=c_s$, *dove le c sono delle costanti arbitrarie, i valori di un sistema di variabili, p. es.* $x_1 \dots x_s$, *e sostituendo questi in u, si ottiene ancora un integrale del sistema.*

Vogliamo infine notare sui sistemi completi un altro teorema il quale ci servirà qualche volta in seguito e la cui dimostrazione, che noi qui tralasciamo, dipende dal legame, già ricordato, fra la teoria delle equazioni ai differenziali totali di primo ordine *completamente integrabili*, e la teoria dei sistemi di equazioni a derivate parziali, come quelle di cui qui ci occupiamo.

Il teorema è il seguente:

Dato un sistema di $n-r$ *integrali indipendenti,*

$$\Omega_1(x)=c_1, \dots \quad \Omega_{n-r}(x)=c_{n-r} \tag{3}$$

dove le c sono costanti arbitrarie, e le Ω *non sono legate da alcuna relazione, si può sempre costruire un sistema completo di r equazioni a derivate parziali, lineari, omogenee, di primo ordine, i cui* $n-r$ *integrali indipendenti sono proprio gli integrali* (3).

Per il caso di $r=1$ si ha un teorema che noi abbiamo già dimostrato in una nota del § 1. Per il caso di r qualunque la costruzione dell'indicato sistema si può fare procedendo coll'analogo metodo ivi tenuto, e cioè eguagliando a zero r determinanti indipendenti di ordine $n-r+1$ della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{n-r}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_{n-r}}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

in cui f è il simbolo di una funzione indeterminata.

Si hanno allora equazioni le quali evidentemente ammettono per integrali tutte le (3).

Resterebbe solo a dimostrare che tal sistema è *completo*, ma ciò ci porterebbe lungi dalla via che ci siamo proposto di seguire.

§ 11. Costruzione, mediante r trasformazioni infinitesimali indipendenti, di ∞^{2r} trasformazioni ad r parametri essenziali.

Sieno date r trasformazioni infinitesimali semplicemente indipendenti, nel senso del § 8:

$$X_1, X_2, \ldots X_r, \tag{1}$$

e con dei coefficienti indipendenti da x,

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$$

formiamo la combinazione lineare:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_r X_r, \tag{2}$$

che sarà una nuova trasformazione infinitesimale. Noi sappiamo che ogni trasformazione infinitesimale individua un gruppo di trasformazioni ad un sol parametro, le cui formole sono:

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1} X x_i + \frac{t^2}{2!} X^2 x_i + \ldots = e^{tX} . x_i \tag{3}$$

Ponendo per X il valore dato da (2), queste formole (3) rappresenteranno trasformazioni dipendenti dai parametri:

$$t\lambda_1, \quad t\lambda_2, \ldots, \quad t\lambda_r.$$

Apparentemente in (3) compaiono $r+1$ parametri, cioè $t, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$, però è facile riconoscere che comparendo ogni λ sempre moltiplicato per t,

i prodotti $t\lambda_1, \ldots t\lambda_r$, funzionano ciascuno come un parametro solo. Quindi le (3) dipendono da non più di r parametri che potremo indicare rispettivamente con:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r. \tag{4}$$

Non si può affermare che tutte queste trasformazioni, ottenute facendo variare i parametri (4) in tutti i modi possibili o solo in un certo campo, e non *facendo variare solamente t e lasciando fissi gli altri*, formino un gruppo; anzi vedremo in seguito che ciò non accade se non quando le X soddisfano a certe relazioni. Per maggiore generalità supponiamo che le $\mu_1 \ldots \mu_r$ non debbano acquistare tutti i valori possibili, ma solo quelli di un certo campo ad r dimensioni. Si avranno allora in ogni modo ∞^{2r} trasformazioni ovvero se ne avranno $\infty^{2(r-\nu)}$, secondo che i parametri μ sono essenziali o no (v. § 1).

La questione che ci proporremo ora è appunto questa: quando è che i parametri sono essenziali?

Noi dimostreremo che *condizione necessaria e sufficiente perchè gli r parametri* (4) *sieno, nelle trasformazioni* (3), *essenziali, è che le r trasformazioni infinitesimali* (1) *sieno semplicemente indipendenti.*

Se infatti fra le (1) sussiste almeno una relazione identica lineare a coefficienti costanti,

$$e_1 X_1 + \ldots + e_r X_r = 0,$$

almeno una di esse si potrà esprimere linearmente mediante le altre, e perciò sostituendo in (2) tale espressione, si ottiene una trasformazione infinite-

simale composta come (2), ma con un numero minore di termini, e quindi con un numero minore di coefficienti costanti; ma i coefficienti costanti che compaiono in (2), moltiplicati per t, corrispondono ai parametri delle trasformazioni (3), dunque il numero di queste potrà essere *al più* $\infty^{2(r-1)}$, e quindi gli r parametri (4) non possono essere essenziali. Resta ora a dimostrare la proprietà reciproca.

Per ciò fare consideriamo prima il caso in cui $r \leqq n$, e la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1r} & \dots & \xi_{nr} \end{matrix} \right\| \qquad (5)$$

non sia identicamente zero. Osservando allora che la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial x'_n}{\partial \mu_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial \mu_r} & \dots & \frac{\partial x'_n}{\partial \mu_r} \end{matrix} \right\| .$$

non potrà neanche essere identicamente zero, perchè questa, per $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$, si riduce alla precedente, si ha che potrà scegliersi *almeno un* sistema di r fra le equazioni (3), le quali possano risolversi rispetto a $\mu_1, \dots \mu_r$; sostituendo tali valori di $\mu_1, \dots \mu_r$, nelle rimanenti $n-r$ fra le (3), otteniamo quindi *al più* $n-r$ relazioni fra le x' e le x.

Ma se i parametri μ non fossero r *essenziali*, cioè se potessero esprimersi per un numero *minore* di altri parametri, allora eliminando tali altri parametri fra le (3), si dovrebbero ottenere relazioni fra le x' e le x in numero certamente *maggiore* di $n-r$; il che, come abbiamo visto, non può darsi; dunque gli r parametri sono essenziali, quando si verifichino le ipotesi anzidette cioè che $r \leq n$ e la matrice (5) è diversa da zero.

Non supponiamo che tali restrizioni, e adoperiamo il seguente artifizio per ridurci al caso precedente.

Introduciamo, insieme alle $x_1, \ldots x_n$, altre $r-1$ serie di variabili congredienti che indicheremo con $x_{n+1} \ldots x_{rn}$, per modo che il sistema completo di tutte le variabili sia quello dato dalla seguente tabella:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, x_n \\ x_{n+1} \,.\,.\,.\,.\,.\, x_{2n} \\ x_{2n+1} \,.\,.\,.\,.\,.\, x_{3n} \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ x_{(r-1)n+1} \,.\,.\,.\, x_{rn} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Assoggetteremo le variabili comprese in ciascuna delle linee di questa tabella alle stesse trasformazioni che le $x_1, \ldots x_n$, indicando, al solito, con $x'_{n+1} \ldots x'_{rn}$, le variabili trasformate, e l'assieme di tutte le formole così ottenute ci stia a rappresentare una trasformazione sola di tutte le variabili del sistema (6); si ha così una trasformazione ad r parametri in cui il numero delle variabili è rn, e quindi certamente maggiore o eguale ad r.

Chiameremo s la trasformazione relativa alle sole variabili $x_1 \dots x_n$, cioè quella data dalle (3), ed S la trasformazione ampliata relativa a tutte le rn variabili.

Se gli r parametri non sono essenziali nella trasformazione s, ciò vuol dire che essi in (3) si possono raggruppare in un numero, minore di r, di funzioni di essi stessi; ma allora, poichè le formole nelle quali entrano gli elementi della 2.ª linea di (6), sono le medesime che le (3), nelle quali si sono cangiati i nomi delle variabili, risulta che anche in tali formole i parametri possono raggrupparsi nell' identico modo che prima; similmente accadrà per le formole relative alle variabili di ciascuna altra delle linee di (6), e di qui si vede che in tutte le formole della trasformazione totale S, i parametri si raggruppano sempre nell'identico modo, il che viene a dire che in S essi non sono essenziali; se noi quindi dimostriamo che i parametri μ sono r essenziali per S, lo saranno tali anche per s.

Formiamo per S la matrice analoga a quella che è (5) per s. Le ξ comprese in (5) sono funzioni delle variabili della sola prima linea di (6); le medesime funzioni, ma scritte nelle variabili della seconda linea di (6) le indicheremo con:

$$\begin{array}{ccc} \xi_{n+1,1} & \dots & \xi_{2n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n+1,r} & \dots & \xi_{2n,r}, \end{array}$$

e similmente aumentando ancora di n il primo indice delle ξ otterremo le ξ scritte nelle variabili

della terza linea di (6) e così di seguito. La matrice richiesta è dunque:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} \dots \xi_{n1} \; \xi_{n+1,1} \dots \xi_{2n,1} \dots \xi_{(r-1)n+1,1} \dots \xi_{rn,1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_{1r} \dots \xi_{nr} \; \xi_{n+1,r} \dots \xi_{2n,r} \dots \xi_{(r-1)n+1,r} \dots \xi_{rn,r} \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

Se almeno uno dei determinanti di ordine r di questa matrice non è zero, allora, ripetendo il ragionamento fatto per il caso sopra considerato, si deduce che i parametri sono essenziali per S e quindi per s. Se invece la matrice (7) è zero identicamente, allora fra gli elementi di una medesima colonna sussisteranno sempre le medesime relazioni lineari, omogenee:

$$A_1 \xi_{i,1} + A_2 \xi_{i,2} + \dots + A_r \xi_{i,r} = 0, \tag{8}$$

dove le A sono in generale funzioni di tutte le x del quadro (6), e l'indice i può variare da 1 ad $r\,n$. Facciamo variare i solamente da 1 ad n, e abbiamo così n equazioni, le quali non possono essere *tutte* conseguenza di tutte le altre, altrimenti, essendo fra tutte le (8) esse sole quelle nelle quali le ξ contengono le x della prima linea del quadro (6), ne verrebbe che queste x non contribuirebbero in nessun modo alla formazione delle quantità A, cioè le A non dipenderebbero dalle $x_{n+1} \dots x_{2n}$. In tal caso le medesime prime n equazioni delle (8), ci mostrerebbero che fra le $X_1, \dots X_r$, scritte nelle variabili $x_1, \dots x_n$, sussisterebbe una relazione lineare, omogenea, a coefficienti non dipendenti dalle variabili stesse, e quindi, contro l'ipo-

tesi, tali X non sarebbero semplicemente indipendenti.

Dunque almeno una delle (8), in cui si fa variare i da 1 ad n, deve essere indipendente da tutte le altre; similmente si dimostra che almeno una delle (8), in cui si fa variare i da $n+1$ a $2n$, deve essere indipendente da tutte le altre; e così di seguito, si ricava che delle (8) almeno r devono essere fra loro indipendenti.

Ma il determinante di queste r equazioni lineari, omogenee, nelle A, è uno dei determinanti di ordine r della matrice (7), e quindi, giusta l'ipotesi, deve essere zero, dunque tali r equazioni sarebbero invece dipendenti fra loro, contro quanto abbiamo dimostrato. Dalla contraddizione risulta la dimostrazione del teorema.

§ 12. Gruppi ad r parametri contenenti la trasformazione identica.

Nel § precedente abbiamo visto in che modo, date r trasformazioni infinitesimali indipendenti, si possono costruire ∞^{2r} trasformazioni ad r parametri essenziali, le quali in generale non formeranno un gruppo.

Ora vogliamo mostrare che dato un gruppo ad r parametri essenziali e contenente la trasformazione identica, quelle fra le sue trasformazioni che appartengono ad un certo intorno della identica possono sempre porsi sotto la forma indicata nel § precedente.

Consideriamo le equazioni differenziali caratteristiche (A) trovate nel § 4, cui soddisfano i secondi membri delle formole di trasformazione di un gruppo ad r parametri essenziali:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x')\, \psi_{jk}(a). \tag{1}$$

Risolvendole rispetto alle ξ, si hanno le formole già trovate al § 4, e cioè:

$$\xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \qquad (j = 1, \ldots r). \tag{2}$$

Introduciamo delle quantità arbitrarie $\lambda_1, \ldots \lambda_r$, moltiplichiamo il primo e secondo membro della (2) per λ_j e sommiamo rispetto a j:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \alpha_{jk}. \tag{3}$$

Ora, introducendo una variabile indeterminata t, di cui le a le consideriamo funzioni, poniamo:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \alpha_{jk} = \frac{d a_k}{d t}; \tag{4}$$

con ciò non si è venuti però in alcun modo a limitare la variabilità delle a, che sono fra loro indipendenti, perchè in queste formole entrano gli altri parametri indeterminati $\lambda_1, \ldots \lambda_r$, e quindi in sostanza si son venute a considerare le r quantità a funzioni, oltre che di t, di altre r quantità. Le equazioni differenziali (4) servono, in altri termini, ad effettuare un cangiamento di parame-

tri, introducendo i parametri t e $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ in luogo delle a, nello stesso modo come nel § 5, abbiamo introdotto il parametro t in luogo di a.

Non si creda d'altra parte che in tal maniera si sono venuti ad introdurre $r+1$, invece di r parametri, perchè, come appare immediatamente dalle formole (4), le quali restano inalterate moltiplicando t per una indeterminata ρ, e le λ per $\frac{1}{\rho}$, le a risultano dipendenti dai soli prodotti:

$$t\lambda_1 = \mu_1, \ldots t\lambda_r = \mu_r.$$

Ammettiamo ora che il gruppo possegga la trasformazione identica, e a questa corrispondano i valori a^0 dei parametri. Le a ricavate dalle (4) verranno funzioni ancora di r costanti, ma se noi poniamo per condizione che per $t=0$, le a si debbano ridurre alle a^0, allora restano determinati i valori di queste costanti, e la trasformazione identica del gruppo sarà quella che corrisponderà al valore zero di t, cioè ai valori:

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_2 = 0.$$

Intervengono ora qui naturalmente considerazioni analoghe a quelle già fatte nel § 5. Noi ammettiamo che le funzioni ψ delle equazioni (1), e quindi le α, sieno funzioni *regolari* in generale solo per un certo campo $((a))$, e che il punto a^0 sia *interno* a tal campo. Esisterà allora un certo intorno finito di a^0, compreso in $((a))$, in cui le α sono sviluppabili in serie di potenze intere, positive delle differenze $(a_k - a^0{}_k)$, e gli integrali

delle equazioni (4) saranno definiti solamente, in generale, per il suddetto intorno di a^0, nel quale intorno solamente resteranno definite le $\lambda_j\, t = \mu_j$ per mezzo delle (4). Ammesso ora che reciprocamente dalle medesime (4) restano definite *in modo unico* le a in funzione delle μ in un certo intorno del punto $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$, cioè (lasciando fisse le λ e facendo solo variare t) in un certo intorno di $t = 0$, ne risulta che colla apposizione delle (4) saremo venuti ad operare un cangiamento di parametri, valevole solo per tutte quelle trasformazioni del gruppo dato, le quali appartengono ad un certo intorno della trasformazione identica. Le formole che così otterremo non varranno quindi, naturalmente, per tutte le trasformazioni del gruppo dato, ma solo per quelle dell'indicato intorno, e per queste si verrà ad ottenere una forma canonica semplice, al cui studio basterà perciò limitare le nostre considerazioni.

Poniamo:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \xi_{jh}(x') = \xi_h(x'), \tag{5}$$

e dalle (3), (4) e (5) otteniamo:

$$\xi_h(x') = \frac{d\,x'_h}{d\,t} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \xi_{jh}(x'), \tag{6}$$

le quali definiscono le x' come funzioni di t e delle λ, e che devono risolversi con la condizione che per $t = 0$ le x' si riducano eguali alle x.

Se noi fissiamo per le λ dei valori determinati, le (6) definiranno ogni volta le trasformazioni di un gruppo ad un sol parametro, contenente la trasformazione identica, le cui formole, come nel § 6, sono:

$$x'_h = x_h + \frac{t}{1} X x_h + \frac{t^2}{2!} X^2 x_h + \dots \quad (7)$$

e la cui trasformazione infinitesimale è:

$$\left.\begin{aligned} X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x) \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{ji} (x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji} (x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} (8)$$

cioè è una combinazione lineare di r altre trasformazioni infinitesimali date da:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji} (x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (j = 1, \dots r). \quad (9)$$

Le trasformazioni (7), quando per t si scelga un valore di quelli compresi in un certo intorno di $t = 0$, sono tutte contenute nel gruppo dato, per quanto si è già detto; esse formano un gruppo ad un parametro solo quando noi intendiamo fisse le λ; possiamo perciò dire che, il gruppo dato avrà comuni con ciascuno degli $\infty^{2(r-1)}$ gruppi ottenuti da (7) dando alle λ tutti i loro possibili valori complessi, * tutte le trasformazioni di un certo intorno di $t = 0$.

---

* Si noti che variando le λ, che sono r, in tutti i modi, i gruppi ottenuti da (7) sono evidentemente $\infty^{2(r-1)}$ e non ∞^{2r}, perchè moltiplicando tutte le λ per un fattore si ha sempre

Il supposto gruppo ad r parametri, contiene dunque ciascuna delle trasformazioni infinitesimali di ciascuno di tali gruppi; in particolare contiene le r trasformazioni infinitesimali (9) *ed in generale contiene la trasformazione infinitesimale data da una qualunque combinazione lineare a coefficienti costanti delle* (9) *stesse.*

Ricordando le cose dette nel § precedente, e mettendole in relazione con quelle dette ora, si vede che quelle fra le trasformazioni del supposto gruppo ad r parametri e che appartengano ad un certo intorno della trasformazione identica, potendosi sempre porre sotto la forma (7), sono le stesse di quelle ottenute con altri intenti nel § precedente; quindi ad esse possiamo applicare il teorema che a quelle si riferiva, e possiamo perciò dedurne che le r *trasformazioni infinitesimali* (9) *sono fra loro semplicemente indipendenti.*

Concludendo possiamo perciò dire:

Dato un gruppo ad r parametri essenziali, e contenente la trasformazione identica, quelle fra le sue trasformazioni che appartengono ad un certo intorno della trasformazione identica possono mettersi sotto la forma (7), *ed esso* CONTIENE r *trasformazioni infinitesimali* SEMPLICEMENTE INDIPENDENTI, *dalle quali quelle trasformazioni del gruppo stesso possono intendersi generate.*

---

il medesimo gruppo, equivalendo ciò a mutare il valore di t. Osserviamo inoltre che se noi intendiamo come una *semplice* infinità l'assieme di tutti i valori *complessi* di una variabile, dovremmo scrivere (come usa scrivere LIE) ∞^{r-1} e non $\infty^{2(r-1)}$; ma noi preferiamo scrivere nella seconda maniera, seguendo così anche il modo adottato nel § 1.

È utile osservare che se è vero che le (7) formano un gruppo quando lascio fisse le λ, non si può affatto affermare che lo stesso accade facendo variare le λ; *anzi possiamo dire che in generale ciò non si verifica se non quando fra le X sussistono certe relazioni,* delle quali tratteremo più tardi; le (1), come abbiamo detto altre volte, non sono perciò *sufficienti* a definire un gruppo. Lo scopo nostro in questo paragrafo, è stato solo quello di dedurre delle conseguenze *necessarie* dalla supposta esistenza del gruppo ad r parametri contenente la trasformazione identica.

Facciamo ancora la seguente osservazione: conosciuta la trasformazione infinitesimale generale appartenente al gruppo, sono conosciute le funzioni ξ_h della formola (5), e quindi si possono immediatamente formare le equazioni differenziali (6) caratteristiche del gruppo stesso; quindi possiamo dire che *la conoscenza della trasformazione infinitesimale generale appartenente al gruppo, porta con sè quella delle equazioni differenziali caratteristiche e viceversa.*

Come esempio, scegliamo il solito esempio del gruppo proiettivo ad una variabile:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

considerato nel § 4, per il quale, come abbiamo ivi trovato, le equazioni differenziali sono:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x' - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} x'^2$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_3} = - \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x' + \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'^2,$$

per modo che le $\xi(x')$ sono rispettivamente:

$$\xi_{11}(x') = 1, \quad \xi_{21}(x') = x', \quad \xi_{31}(x') = x'^2.$$

Il gruppo proposto contiene la trasformazione identica, della quale i parametri sono:

$$a_1^0 = 0, \quad a_2^0 = 0, \quad a_3^0 = 1,$$

e le tre trasformazioni infinitesimali semplicemente indipendenti, come le (9), sono, nel nostro caso:

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x\frac{d}{dx}, \quad X_3 = x^2 \frac{d}{dx},$$

per modo che la trasformazione infinitesimale generale (8) del gruppo è:

$$X = (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2) \frac{d}{dx}.$$

Per l'osservazione fatta sopra, si ha allora che le formole di trasformazione del gruppo devono risultare dall'integrazione dell'equazione:

$$dt = \frac{dx'}{\lambda_1 + \lambda_2 x' + \lambda_3 x'^2},$$

cui si riducono le (6) nel nostro caso, e di cui ve

ne ha appunto tre indipendenti col variare delle λ in tutti i modi possibili; questa equazione bisogna integrarla con la condizione che per $t = 0$, si abbia $x' = x$.

L'integrale della precedente equazione è allora:

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = e^{\gamma t} \frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

dove α e β sono le due radici di:

$$\lambda_1 + \lambda_2 x' + \lambda_3 x'^2 = 0,$$

e γ è il discriminante della medesima equazione.

Si vede con ciò che si è appunto ottenuto il gruppo dato (scritto però naturalmente in parametri diversi), perchè dalla precedente formola si ricava x' linearmente mediante x. Risolvendo questa formola rispetto a x' e paragonandola con quella data in principio, si troverebbero le relazioni fra i parametri antichi a e i nuovi, e tali relazioni devono accordarsi con quelle che si ricaverebbero direttamente dalle relazioni (4) calcolate per il nostro caso. Ci dispensiamo però dall'eseguire questa verifica.

§ 13. Proprietà di un assieme di ∞^{2r} trasformazioni, i secondi membri delle cui formole soddisfanno ad equazioni del tipo (A) del § 4.

Come abbiamo già detto le equazioni differenziali (A) del § 4, se sono necessarie perchè si ab-

bia un *gruppo*, non sono però sufficienti. Ora vogliamo supporre di avere un sistema di ∞^{2r} trasformazioni:

$$x'_h = f_h(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_r) \quad (h = 1 \ldots n), \quad (1)$$

ad r parametri essenziali, e che i secondi membri delle (1) soddisfino ad equazioni del tipo (A), cioè del tipo:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \psi_{jk}(a), \quad (2)$$

e vogliamo esaminare una proprietà generale di questo assieme di trasformazioni, su cui non facciamo affatto l'ipotesi che esse formino un gruppo.

Supporremo sempre, come al solito, che le ψ e le ξ sieno definite come funzioni *regolari* solo in certi campi $((a))$ e $((x))$.

Prima di tutto facciamo vedere che, supposti in (1) gli r parametri a essenziali, le funzioni ψ in (2) sono tali che il loro determinante è diverso da zero per tutto il campo $((a))$, e le funzioni ξ nelle medesime (2), per il campo $((x))$, non possono soddisfare a relazioni lineari del tipo $\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh} = 0$, dove le g sieno indipendenti dalle x'; cioè, se i parametri sono essenziali, le equazioni (2), oltre che essere del tipo delle equazioni (A) del § 4, sono soddisfacenti alle medesime condizioni che quelle.

Se il determinante delle ψ fosse zero, fra le:

$$\psi_{j1}, \psi_{j2}, \ldots \psi_{jr},$$

sussisterebbero le medesime relazioni lineari omogenee qualunque sia j, cioè si avrebbe identicamente:

$$\chi_1(a)\psi_{j1}(a) + \ldots \chi_r(a)\psi_{jr}(a) = 0,$$

per qualunque j. Dalle (2) quindi si avrebbe:

$$\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = 0,$$

per qualunque h, e quindi le x'_h date dalle (1), soddisferebbero tutte a equazioni come le precedenti, e perciò i parametri non sarebbero essenziali per quanto si è detto nel § 1.

Essendo dunque il determinante delle ψ diverso da zero, risolviamo le (2) rispetto alle ξ, ed otteniamo:

$$\xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k}. \tag{3}$$

Ora se le ξ soddisfacessero a relazioni come:

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh} = 0, \tag{4}$$

sostituendo in queste i valori (3), si avrebbe:

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} g_j \alpha_{jk}(a) \right) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = 0,$$

e perciò, se le g fossero indipendenti dalle x', queste equazioni cui soddisferebbero le x', starebbero ancora a mostrare che i parametri nelle (1) non sarebbero essenziali, contro l'ipotesi.

Per trovare ora la annunciata proprietà delle (1), cerchiamo di ottenere le (1) stesse in un altro modo, e cioè con la diretta integrazione delle (2): è bensì vero però che non si possono ottenere gli integrali delle (2), completamente determinati, se noi non fissiamo quali espressioni le x' devono avere in funzione delle x, per un determinato sistema di valori delle a, che chiameremo a', e ciò sempre per la stessa considerazione sviluppata al § 5; ma supponendo conosciuta una sola delle (1), quella cioè che corrisponde ai valori $a'_1, \ldots a'_2$ dei parametri, e integrando le (2), sotto questa condizione, gli integrali che si otterranno dovranno esattamente coincidere con le (1) stesse.

Per effettuare tale integrazione adoperiamo lo stesso artifizio già usato nel § precedente, cioè introduciamo le $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ e la t, e troviamo così, con gli stessi calcoli ivi eseguiti, e con le stesse osservazioni (specialmente quelle riguardanti i campi di validità dei vari sviluppi) le equazioni (3), (4), (5) e (6) dello stesso §.

Gli integrali richiesti sono allora quelli delle equazioni:

$$\frac{d\,x'_h}{d\,t} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, \xi_{jh}(x'), \quad (h = 1, \ldots n) \qquad (5)$$

le quali devono integrarsi con la condizione che per $t = 0$ le x'_h debbano diventare $f_h(x, a')$. L'unica differenza fra il caso attuale e quello del § precedente sta nel non supporre ora, come invece si supponeva prima, che i valori a', che allora si chiamavano a^0, corrispondessero alla trasforma-

zione identica, ovverossia che le funzioni $f_h(x, a')$ si riducessero semplicemente ad x_h.

Gli integrali delle (5) sieno:

$$\Omega_h(x'_1 \ldots x'_n, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \text{cost.},$$

i quali colla sopradetta condizione possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_h(x'_1 \ldots x'_n, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \\ &= \Omega_h(f_1(x, a') \ldots f_n(x, a'), 0, \ldots, 0), \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

le quali formole risolute rispetto alle x', e sostituendovi per $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ i loro valori in funzione degli antichi parametri a, devono dare esattamente le (1) *purchè ci limitiamo ad un certo intorno del punto a', che corrisponde a sua volta ad un certo intorno di $t = 0$.*

Ora si vede immediatamente che le (6) non sono altro che il risultato della eliminazione delle x''_h fra i due seguenti sistemi di formole:

$$x''_h = f_h(x_1 \ldots x_n; a'_1 \ldots a'_r), \quad (7)$$

e:

$$\Omega_h(x'_1 \ldots x'_n, \lambda_1 t \ldots \lambda_r t) = \Omega_h(x''_1 \ldots x''_n, 0 \ldots 0); \quad (8)$$

in altri termini la trasformazione (6) non è altro che il prodotto delle due trasformazioni (7) e (8).

Ora cosa è la trasformazione (8)? Essendo le $\Omega_h = \text{cost.}$, integrali delle (5), se noi consideriamo $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ come fissi e t come variabile, le (8) non sono altro che le formole delle trasformazioni di un gruppo ad un parametro solo t, e contenente la trasformazione identica per $t = 0$; e ciò risulta

immediatamente dalle (8) stesse. Siamo così condotti ad enunciare la proprietà generale cui abbiamo accennato in principio, e che è:

Quelle fra le ∞^{2r} trasformazioni (1), *in cui i parametri si suppongano tutti essenziali, che soddisfacciano alle equazioni differenziali* (2), *e che appartengano ad un certo intorno della trasformazione coi parametri a', possono sempre considerarsi come il prodotto di quella fissa coi parametri a', per una trasformazione (variabile) di una serie $\infty^{2(r-1)}$ di gruppi ad un sol parametro t, contenenti tutti la trasformazione identica e di cui le trasformazioni che si considerano, sono sempre, al solito, quelle relative ad un certo intorno della identica.*

È da notarsi che la trasformazione infinitesimale appartenente al gruppo generale della serie $\infty^{2(r-1)}$ di cui si parla nel precedente teorema, è:

$$X = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{jh}(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_h},$$

dove le λ sono delle costanti fisse.

Questa trasformazione infinitesimale è evidentemente combinazione lineare di r altre; ponendo:

$$X_j = \sum_{h=1}^{n} \xi_{jh}(x) \frac{\partial}{\partial x_h},$$

risulta:

$$X = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j .$$

§ 14. Gruppi ad r parametri in generale. Relazioni caratteristiche fra le r trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri avente la trasformazione identica. Secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi.

Date le solite equazioni differenziali:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x')\,\psi_{jk}(a) \quad (h = 1, \dots n) \qquad (1)$$

donde:

$$\xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} \quad (j = 1, \dots r) \qquad (2)$$

cui soddisfanno le formole:

$$x'_h = f_h(x, a_1 \dots a_r) \quad (h = 1, \dots n), \qquad (3)$$

di un gruppo ad r parametri essenziali, vogliamo ricercare in questo § se le ξ sono arbitrarie, ovvero legate da qualche relazione. Troveremo, secondo quanto abbiamo già annunziato nei § precedenti, che tali funzioni non sono arbitrarie, ma che, formando con le ξ, nello stesso modo che nel § precedente, i soliti simboli operativi X (i quali però nel nostro caso generale, in cui non presupponiamo per ora che il gruppo contenga la trasformazione identica, non rappresenteranno più simboli di trasformazioni infinitesimali *appartenenti* al gruppo), fra queste X sussisteranno certe

relazioni; ed inoltre che relazioni analoghe devono anche sussistere fra certi altri simboli operativi analoghi alle X, ma formati invece che con le ξ, con le α e quindi espressi invece che nelle variabili x, nelle quantità a.

Risolvendo le (3) rispetto alle x, si abbia:

$$x_h = F_h(x', a). \tag{4}$$

Si possono facilmente trovare delle equazioni differenziali cui soddisfano le F_h, giacchè derivando rispetto ad a_k, risulta:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} + \frac{\partial F_h}{\partial a_k},$$

e moltiplicando per α_{jk}, sommando rispetto a k, e tenendo conto della (2), abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} + \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F_h}{\partial a_k} = 0.$$

Poniamo ora:

$$\left.\begin{aligned} X'_j &= \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \\ A_j &= \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F_h}{\partial a_k}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Avendo supposto in (3) i parametri *essenziali*, ne viene, nello stesso modo come sul principio del § prec., (oltre che il determinante $|\psi|$ delle ψ diverso da zero), anche la indipendenza lineare delle $\xi_1 \ldots \xi_r$, e quindi la indipendenza lineare delle $X'_1 \ldots X'_r$. Dall'essere poi il determinante delle ψ anche diverso da infinito (perchè nel campo che

si considera ogni ψ è funzione regolare e quindi finita), ne viene che è anche diverso da zero quello delle α che è l'inverso di quello delle ψ, (perchè ogni α è eguale ad un minore di ordine $r-1$ di $|\psi|$ diviso per $|\psi|$ stesso) e quindi facilmente anche l'indipendenza lineare delle A.

Ponendo inoltre:

$$X'_j + A_j = \Omega_j\,, \tag{6}$$

consideriamo il sistema di equazioni a derivate parziali, di primo ordine, lineari, omogenee:

$$\Omega_j F = 0 \quad (j = 1, \ldots r). \tag{7}$$

Evidentemente questo sistema di r equazioni, in cui figurano come variabili $x'_1 \ldots x'_n\,, a'_1 \ldots a_r$, in numero di $n+r$, è soddisfatto da tutte le funzioni $F = F_h$, che sono in numero di n; inoltre le sue equazioni sono linearmente indipendenti, per quanto si è ora detto.

Esso è della specie di quelli considerati nel § 10; e possedendo almeno n integrali indipendenti, cioè le F_h, non può che essere un sistema completo; perchè se non lo fosse, col procedimento indicato al medesimo § 10, aggregandogli altre equazioni del tipo $(\Omega_j \, \Omega_i) = 0$, si potrebbe ridurlo completo, ma allora il numero dei suoi integrali indipendenti (che è sempre eguale alla differenza fra il numero delle variabili, che nel nostro caso sono $n+r$, e il numero delle equazioni del sistema ridotto completo), sarebbe minore di n, il che è in contraddizione con quanto si è sopra detto.

Quindi le *parentesi* $(\Omega_j \, \Omega_i)$ saranno esprimibili linearmente mediante le Ω stesse:

$$(\Omega_j \, \Omega_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} \, \Omega_s \,, \tag{8}$$

dove le c dovrebbero essere in generale funzioni delle x' e delle a; noi però dimostreremo *che esse sono costanti.*

Prima di tutto, sostituendo per le Ω i loro valori (6), si ha:

$$(\Omega_j \, \Omega_i) = (X'_j \, X'_i) + (X'_j \, A_i) + \\ + (A_j \, X'_i) + (A_j \, A_i),$$

ma:

$$(X'_j \, A_i) = 0, \qquad (A_j \, X'_i) = 0,$$

perchè le variabili cui si riferisce il simbolo X' sono diverse da quelle cui si riferisce il simbolo A, e quindi resta:

$$(\Omega_j \, \Omega_i) = (X'_j \, X'_i) + (A_j \, A_i),$$

e per la (8):

$$(X'_j \, X'_i) + (A_j \, A_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} \, X'_s + \sum_{s=1}^{r} c_{jis} \, A_s \,,$$

donde, sempre per il fatto che i simboli X' e A si riferiscono a due diverse categorie di variabili, si ottengono infine le due formole:

$$\left. \begin{aligned} (X'_j \, X'_i) &= \sum_{s=1}^{r} c_{jis} \, X'_s \\ (A_j \, A_i) &= \sum_{s=1}^{r} c_{jis} \, A_s \,, \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Ora:

$$(A_j A_i) = \sum_{\varrho=1}^{r} (A_j \alpha_{i\varrho} - A_i \alpha_{j\varrho}) \frac{\partial}{\partial a_\varrho}$$

$$\sum_{s=1}^{r} c_{jis} A_s = \sum_{\varrho=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{r} c_{jis} \alpha_{s\varrho} \right) \frac{\partial}{\partial a_\varrho},$$

quindi:

$$\sum_{s=1}^{r} c_{jis} \alpha_{s\varrho} = A_j \alpha_{i\varrho} - A_i \alpha_{j\varrho}.$$

Queste ultime equazioni, facendo variare ρ, rappresentano un sistema di r equazioni lineari nelle quantità c_{ji1}, $c_{ji2}, \ldots c_{jir}$, e il determinante dei coefficienti, che è il determinante formato con le quantità $\alpha_{s\varrho}$, è diverso da zero per teoremi già dimostrati nel § 4; esse sono perciò risolubili rispetto alle c, per le quali daranno valori dipendenti in generale solo dalle a e non dalle x'.

Ma si può poi per di più dimostrare che le c non dipendono neanche dalle a; se infatti operiamo col primo e secondo membro della prima delle (9) su di una funzione *qualunque* f, che però non contenga le a, e poi deriviamo primo e secondo membro rispetto ad a_k, otteniamo:

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{\partial c_{jis}}{\partial a_k} X'_s f = 0,$$

la quale, essendo f una funzione *qualunque* delle x', è una relazione che non può sussistere, se le X'_s sono *semplicemente indipendenti*; quindi i coefficienti $\frac{\partial c_{jis}}{\partial a_k}$ devono essere zero, e perciò le c sono indipendenti anche dalle a.

Possiamo dunque dire:

Perchè le equazioni differenziali (1) *possano definire un gruppo ad* r *parametri essenziali, bisogna che i simboli* X' *e* A *definiti dalle equazioni* (5), *soddisfacciano alle relazioni* (9) *dove le* c *sieno costanti.*

Ora noi sappiamo, dalle considerazioni sviluppate al § 12, che se il gruppo ad r parametri contiene la trasformazione identica, le X' sono simboli di trasformazioni infinitesimali (scritte nelle variabili x') appartenenti al gruppo stesso; possiamo perciò enunciare il seguente teorema, come corollario del precedente:

Se un gruppo ad r *parametri contiene la trasformazione identica, fra le sue* r *trasformazioni infinitesimali indipendenti sussistono le relazioni:*

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

dove le c *sono delle quantità costanti.*

(Si noti che abbiamo, come al solito, scritto X invece di X' perchè intendiamo che questi simboli sieno scritti nelle x piuttosto che nelle x'.)

Resta ora a dimostrare che *reciprocamente le condizioni* (9), *le quali sono* NECESSARIE *perchè le equazioni differenziali* (1) *possano con i loro integrali dare un* GRUPPO *ad* r *parametri, sono anche a ciò* SUFFICIENTI, *quando noi aggiungiamo per di più la condizione che il gruppo debba contenere la trasformazione identica.*

Formiamo le r equazioni differenziali:

$$\Omega_1 F = 0, \ldots \Omega_r F = 0,$$

le quali, in forza delle ipotesi (9) (donde risultano le (8)), formano un sistema completo, e quindi ammettono $(n+r)-r=n$ integrali indipendenti. Poniamo la condizione che per:

$$a_k = a^0{}_k \qquad (k=1, \ldots r),$$

le x'_h, ricavate da tali integrali in funzione delle quantità che figurano da costanti e che chiameremo $x_1 \ldots x_n$, si riducano esattamente a x_h; otteniamo allora delle formole delle quali le x' si possono ricavare funzioni determinate delle x:

$$x'_h = f_h(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_r). \qquad (10)$$

Dalla natura delle equazioni $\Omega = 0$, si hanno naturalmente al solito delle limitazioni per il campo di validità delle (10); in generale possiamo dire che le (10) varranno per tutto un certo intorno del punto $a^0{}_1 \ldots a^0{}_r$.

Io dico che sotto tali limitazioni queste formole rappresentano quelle di un gruppo, il quale naturalmente, per le posizioni ora fatte, contiene la trasformazione identica.

Infatti se gli integrali delle Ω, determinati nel modo detto e risoluti rispetto alle x, li indichiamo con:

$$x_h = F_h(x', a),$$

derivando rispetto ad a_k si ha:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} + \frac{\partial F_h}{\partial a_k};$$

donde, moltiplicando per α_{jk} e sommando rispetto

a k, e tendo infine conto delle:

$$\Omega_j F_h = X'_j F_h + A_j F_h = 0,$$

cui soddisfano tutte le F_h, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} - \xi_{ji}(x') \right) = 0.$$

Ma il determinante delle derivate delle F rispetto alle x' è diverso da zero, per le solite ragioni, dunque i coefficienti nelle ultime equazioni lineari devono essere zero, cioè deve aversi:

$$\xi_{ji}(x') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k},$$

le quali sono esattamente le (2) di questo §, e che con opportuna risoluzione danno le (1).

Siamo dunque venuti ad ottenere coll'integrazione delle Ω, un sistema (10) soddisfacente alle equazioni fondamentali (1), sulle quali noi già intendiamo fatte sin dapprincipio le ipotesi solite, che cioè, negli opportuni campi, il determinante delle ψ sia diverso da zero, e le ξ non soddisfacciano ad alcuna relazione del tipo $\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh} = 0$ (dove le g sieno indipendenti dalle x'). Con tali ipotesi risulta che i parametri nelle (10) sono essenziali, perchè se non lo fossero, e quindi le f_h soddisfacessero a relazioni come $\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a) \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = 0$, dalle (1), eliminando le derivate delle x', si otterrebbe:

$$\sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \left(\sum_{k=1}^{r} \psi_{jk}(a) \chi_k(a) \right) = 0,$$

le quali relazioni non possono sussistere, come si è ora detto.

Applichiamo ora alle ∞^{2r} trasformazioni (10) il teorema dimostrato nel § precedente, scegliendo in primo luogo come valori a' i valori a^0 ultimamente considerati.

Allora risulta che ogni trasformazione (10), in cui le $a_1 \dots a_r$, sieno comprese in quell'intorno di $a^0{}_1 \dots a^0{}_r$ di cui si è detto di sopra, si può comporre come prodotto della trasformazione coi parametri a^0, che è l'identica, per le trasformazioni (in un certo intorno della identica) di una serie $\infty^{2(r-1)}$ di gruppi ad un sol parametro e contenenti la trasformazione identica, e di cui la trasformazione infinitesimale generica è la medesima X della fine del § precedente; di qui risulta intanto che quelle fra le (10) di cui abbiamo sopra discorso possono porsi sotto la forma:

$$x'_h = x_h + \frac{t}{1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_h + \dots \tag{11}$$

dove t debba essere scelto in un opportuno intorno di $t = 0$.

Riapplichiamo ora lo stesso teorema del § precedente, ma scegliendo per valori a' dei valori qualunque (fra quelli naturalmente che sono compresi nel campo di variabilità delle a); risulta allora che ognuna delle (10), ovverossia delle (11), si potrà sempre considerare come prodotto di quella coi parametri a', per una delle (11); ma poichè le (11) sono le stesse (10) e poichè i parametri a' li abbiamo scelti arbitrariamente, ne viene che il prodotto di due qualunque delle (10)

è ancora una delle (10), cioè che le (10), in cui il variare dei parametri sia limitato nell'indicato modo, formano un gruppo, e con ciò il teorema è dimostrato.

Il teorema precedente è capace di una notevole semplificazione, giacchè le condizioni (9) che in esso compariscono, si riferiscono sia ai simboli X', che ai simboli A.

Supponiamo assegnati solamente gli r simboli X', fra loro semplicemente indipendenti, e soddisfacenti alle:

$$(X'_j\, X'_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X'_s\,; \tag{12}$$

si domanda: bastano queste per determinare un gruppo (contenente la trasformazione identica)?

In altri termini: date le X' soddisfacenti alle (12), si possono determinare delle A, soddisfacenti alle seconde relazioni fra le (9)? ovvero, il supporre l'esistenza di tali A, porta con sè delle nuove condizioni a cui dovranno assoggettarsi le X'?

Dimostreremo che bastano le (12) perchè possa determinarsi l'indicato gruppo, giacchè si può sempre costruire un sistema di espressioni $A_1 \ldots A_r$, soddisfacenti a relazioni come le (12), e ciò senza supporre nessuna nuova limitazione alle X'.

Introduciamo, come nel § 11, $r-1$ altre serie di variabili congredienti alle $x_1' \ldots x'_n$ e si ab-

biano così le r serie:

$$\left.\begin{array}{c} x'_1 \; \dots \; x'_n \\ x''_1 \; \dots \; x''_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1^{(r)} \; \dots \; x_n^{(r)} \end{array}\right\} \quad (13)$$

e indichiamo con X'_j, X''_j, $\dots X_j^{(r)}$ le X_j scritte rispettivamente in ciascuna di queste serie di variabili.

Poniamo:

$$W_j = X'_j + X''_j + \dots X_j^{(r)}$$

per ciascun valore di j.

È facile riconoscere che avendo supposto le X semplicemente indipendenti, la stessa proprietà ne viene per le W, e avendo supposto che le X' soddisfano alle (12), ad analoghe relazioni soddisferanno le W. Perciò le equazioni:

$$W_j F = 0,$$

formeranno un sistema completo di r equazioni in nr variabili; esse ammetteranno quindi $nr - r$ integrali indipendenti (v. § 10), che sieno:

$$b_1 \; b_2 \; \dots \; b_{nr-r},$$

Assumiamo r nuove funzioni di tutte le variabili, ed indipendenti dalle b, e chiamiamole $a_1 \dots a_r$. Possiamo nelle W introdurre in luogo di tutte le rn variabili, le b e le a, e, con le formole

del § 10, otterremo:

$$W_j = \sum_{k=1}^{r} W_j(a_k) \frac{\partial}{\partial a_k} + \sum_{k=1}^{rn-r} W_j(b_k) \frac{\partial}{\partial b_k},$$

ma essendo le b integrali delle $W_j = 0$, il secondo sommatorio è zero; resta perciò solamente:

$$W_j = \sum_{k=1}^{r} W_j(a_k) \frac{\partial}{\partial a_k}. \qquad (14)$$

I coefficienti di questo simbolo sono in generale funzioni di tutte le a e di tutte le b, e qualunque sieno i valori di queste variabili, le W_j sono sempre semplicemente indipendenti e soddisfacenti a relazioni come le (12); se noi facciamo perciò le b eguali a dei valori fissi e determinati (e ciò lo si può fare perchè in (14) non compaiono più le derivate rispetto alle b), otteniamo dalle (14) dei simboli:

$$A_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial}{\partial a_k}, \qquad (15)$$

i quali saranno semplicemente indipendenti, e soddisferanno ancora a relazioni come le (12) con i medesimi coefficienti costanti c_{jis}.

Abbiamo così formato i medesimi simboli A che comparivano nel precedente teorema, e quindi si deduce l'assunto, cioè l'esistenza del gruppo ad r parametri.

Il teorema che così si ottiene è il seguente:

Si abbiano r trasformazioni infinitesimali sem-

plicemente indipendenti X_j $(j = 1, 2 \ldots r)$, * *soddisfacenti alle relazioni:*

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

dove le c sono delle quantità costanti; si possono allora determinare dei gruppi ad r parametri essenziali, contenenti la trasformazione identica, e le r trasformazioni infinitesimali X_j ; *le formole di trasformazioni di uno qualunque di tali gruppi, nell'intorno della trasformazione identica, potranno essere sempre messe sotto la forma:*

$$x'_h = x_h + \frac{t}{1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_h + \frac{t^2}{2!} \sum_{ij}^{1 \ldots r} \lambda_i \lambda_j X_i X_j x_h + \ldots$$

Supponiamo ora che *si abbia un gruppo di* Lie (v. § 2) *a r parametri essenziali, contenente la trasformazione identica* per $a = a^0$. Potendosi le sue trasformazioni, intorno all'identica, porre sempre sotto la precedente forma, e poichè, come abbiamo già ricordato al § 5, il punto a^0 sarà allora sempre *interno* al campo di variabilità dei parametri a, ne viene che, come pei gruppi ad un sol parametro (v. § 5), *le sue trasformazioni, almeno per un certo intorno della identica, sono, a due a due, una inversa dell'altra.*

---

* Scriviamo X invece di X', perchè le intendiamo scritte nelle variabili x e non nelle x', come invece, per ragioni di comodità di dimostrazione, comparivano scritte nelle precedenti considerazioni.

Ciò costituisce una rimarchevole proprietà generale dei *gruppi di Lie contenenti la trasformazione identica.*

Dal teorema precedente risulta che le formole:

$$\left.\begin{array}{l} x'_h = x_h + \dfrac{t}{1} \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_h + \\ \quad + \dfrac{t^2}{2!} \sum\limits_{ij}^{1..r} \lambda_i \lambda_j X_i X_j x_h + \ldots \end{array}\right\} \quad (16)$$

rappresentano quelle fra le trasformazioni di un gruppo ad r parametri essenziali:

$$\mu_1 = \lambda_1 t, \ . \ . \ . \ \mu_r = \lambda_r t,$$

che appartengono ad un certo intorno della trasformazione identica, la quale corrisponde ai valori $\mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_r = 0$; cioè a dire che esiste nello spazio ad r dimensioni un intorno del punto $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = 0$, tale che presi due punti di tale intorno, di coordinate rispettivamente:

$$\mu'_1 \ldots \mu'_r, \quad \mu''_1 \ldots \mu''_r,$$

le formole (16) corrispondenti sono convergenti, e danno quindi luogo a due trasformazioni; di queste, fatto il prodotto, si ha una trasformazione, data dalle medesime (16), in cui i parametri μ sieno le coordinate di un altro punto del sopradetto intorno.

Ora ci proponiamo di vedere in che maniera, date le X soddisfacenti alle solite condizioni, possano costruirsi le trasformazioni di un gruppo in cui gli r parametri essenziali $\mu_1 \ldots \mu_r$ possano acquistare tutti i possibili valori, senza più alcuna

limitazione, e che quindi fa, per la teoria dei gruppi ad r parametri, lo stesso ufficio che il gruppo canonico (v. § 5) faceva per la teoria dei gruppi ad un sol parametro, e può perciò, a buon diritto, chiamarsi *gruppo canonico ad r parametri.*

Data la trasformazione infinitesimale generica:

$$Z = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r ,$$

dove le λ sono dei valori arbitrarii, e le X soddisfano alle anzidette condizioni, con lo stesso metodo adoperato alla fine del § 7, possiamo trovare le equazioni finite:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 (x', \lambda_1 \ldots \lambda_r) = \Omega_1 (x, \lambda_1 \ldots \lambda_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{n-1} (x', \lambda_1 \ldots \lambda_r) = \Omega_{n-1} (x, \lambda_1 \ldots \lambda_r) \\ \Omega_n (x', \lambda_1 \ldots \lambda_r) = \Omega_n (x, \lambda_1 \ldots \lambda_r) + t, \end{array}\right\} \quad (17)$$

le quali, per le cose anzidette, devono corrispondere alle (16), solo però in generale per valori di $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$, opportunamente piccoli. Ma le (16) per siffatti valori formano un gruppo, dunque deve avvenire lo stesso per le (17), il che vuol dire che se si considera un altro sistema di valori delle λ, cioè $\lambda'_1, \ldots \lambda'_r$, e il medesimo t, le formole:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 (x'', \lambda'_1 \ldots \lambda'_r) = \Omega_1 (x', \lambda'_1 \ldots \lambda'_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{n-1} (x'', \lambda'_1 \ldots \lambda'_r) = \Omega_{n-1} (x', \lambda'_1 \ldots \lambda'_r) \\ \Omega_n (x'', \lambda'_1 \ldots \lambda'_r) = \Omega_n (x', \lambda'_1 \ldots \lambda'_r) + t, \end{array}\right\} \quad (18)$$

combinate colle (17), eliminandovi le x', devono dar luogo ad un sistema identico alle (17) stesse, dove i valori λ sieno mutati in certi altri valori λ'', purchè, però, sia i prodotti:

$$\lambda_1 t, \ldots\ldots\ldots \lambda_r t,$$

sia gli altri:

$$\lambda'_1 t, \ldots\ldots\ldots \lambda'_r t,$$

sieno opportunamente piccoli. (In quanto al valore di t è evidente che lo si può immaginare fisso sia in (17), che in (18), che nel prodotto, perchè le (17) devono dipendere solo dai prodotti di t per le λ.) L'eliminazione indicata deve dunque dar luogo a delle formole come le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 (x'', \lambda''_1, \ldots \lambda''_r) &= \Omega_1 (x, \lambda''_1, \ldots \lambda''_r) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{n-1} (x'', \lambda''_1, \ldots \lambda''_r) &= \Omega_{n-1} (x, \lambda''_1, \ldots \lambda''_r) \\ \Omega_n (x'', \lambda''_1, \ldots \lambda''_r) &= \Omega_n (x, \lambda''_1, \ldots \lambda''_r) + t. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Prendendo fisso t, le (19) devono essere conseguenza delle (17) e delle (18) per tutti gli ∞^{2r} sistemi di valori delle λ, λ', purchè scelti in un opportuno campo ad r dimensioni attorno il punto $(0, 0, \ldots 0)$; ma è chiaro che se ciò avviene per gli indicati valori delle λ, poichè questi, che sono del resto arbitrarii, non possono in alcun modo influire sul risultato dell'eliminazione, ne risulta che la medesima cosa dovrà avvenire per valori *qualunque* delle λ, e quindi ne deduciamo che le trasformazioni (17), dove le x sieno comprese in

un certo campo $((x))$, considerate nella loro *totalità*, cioè facendo variare le λ e t in tutti i modi possibili, *formeranno un gruppo*, che chiameremo *gruppo canonico ad r parametri essenziali.* Esso è evidentemente l'assieme di tutti gli $\infty^{2(r-1)}$ gruppi canonici ad un parametro solo, individuati dalla trasformazione infinitesimale generica Z.

Questo gruppo ha la proprietà di comprendere di ogni trasformazione anche la inversa, perchè mutando nelle (17) il segno di t, si ha una trasformazione compresa nelle (17) stesse.

Abbiamo dunque il teorema:

Si abbiano r trasformazioni infinitesimali semplicemente indipendenti X_j ($j=1, 2, \ldots r$) soddisfacenti alle relazioni:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

dove le c sono delle quantità costanti; resta allora individuato un gruppo ad r parametri essenziali, contenente la trasformazione identica, e contenente di ogni trasformazione anche la inversa. Tal gruppo è costituito dall'assieme di tutti gli $\infty^{2(r-1)}$ gruppi canonici individuati dalle trasformazioni infinitesimali $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r$, le λ avendo valori costanti arbitrarii.

Da quanto abbiamo detto risulta che *condizione necessaria e sufficiente perchè r trasformazioni infinitesime semplicemente indipendenti X_j possano generare un gruppo ad r parametri essenziali è che esse soddisfino a relazioni del tipo:*

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

essendo le c quantità costanti. Questo importante teorema è il cosiddetto *secondo teorema fondamentale* della teoria dei gruppi. Di esso si trovano le prime idee in un lavoro di Lie (*Math. Ann.* Volume 8, 1874, v. pag. 303), v. anche: *Götting. Nach.*, 1874, pag. 533, 540; *Archiv for Math. og Naturv.* Christiania, 1878; *Math. Ann.*, 16, (1879), p. 460 e seg.; *Leipz. Berichte* (1890) p. 453 (specialmente p. 472-476).

La dimostrazione data di sopra del *secondo teorema fondamentale* è su per giù quella che si trova nell'opera di Lie; è utile ora far vedere come si può dare dello stesso teorema una dimostrazione molto più semplice e quasi immediata, servendosi dei risultati da noi ottenuti nel § 9.

Date le X formiamo la combinazione:

$$Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_r X_r, \qquad (20)$$

dove le λ sieno dei coefficienti costanti, e scriviamo le formole canoniche per le trasformazioni del gruppo *ad un sol parametro* generato da una trasformazione infinitesimale Z_1, ottenuta da quelle della schiera (20) prendendo per le λ valori fissi, e le formole analoghe per il gruppo generato da un'altra Z_2 delle trasformazioni iufinitesimali comprese nella schiera (20), in cui si sieno fissati valori *diversi* per le costanti λ.

La quistione che allora si presenta, e che è relativa al teorema che vogliamo dimostrare è questa: a quali condizioni devono soddisfare le X perchè, scegliendo in qualunque modo le Z_1 e Z_2

fra quelle comprese nella schiera (20), i due gruppi ad un sol parametro da esse generati, appartengano ad un medesimo gruppo ad r parametri, o, in altri termini, perchè moltiplicando una delle trasformazioni finite del gruppo generato da Z_1, per una di quelle del gruppo generato da Z_2, si abbia una trasformazione appartenente al gruppo generato da una certa Z_3, la quale sia, a sua volta, compresa fra quelle della schiera (20)?

Come si vede dunque, la quistione si riduce a cercare la condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto delle due trasformazioni (1) del § 9, *in cui si sieno mutate dappertutto le X nelle Z*, sia una la cui trasformazione infinitesimale generatrice sia una combinazione lineare a coefficienti costanti delle X, quando lo sieno le Z_1, Z_2; o, in altri termini, *la condizione necessaria e sufficiente perchè la Z_3 data dalla formola* (7) *del § 9 sia una combinazione lineare a coefficienti costanti delle X, qualunque sieno i parametri t, t'.*

Ora tale condizione si trova agevolmente; giacchè, prima di tutto, se supponiamo che si abbiano le relazioni:

$$(X_h X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} X_s \,, \tag{21}$$

è evidente che tutte le parentesi:

$$(Z_1 Z_2), \quad (Z_1 Z_1 Z_2), \quad (Z_2 Z_1 Z_2), \quad (Z_1 Z_2 Z_1 Z_2), \ldots$$

saranno delle espressioni lineari a coefficienti costanti delle X, e quindi lo sarà anche la Z_3, cioè questa apparterrà alla schiera (20).

D'altra parte se poniamo che Z_3 sia una combinazione lineare a coefficienti costanti delle X, lo dovrà essere ancora:

$$Z_3 - t\, Z_1 - t'\, Z_2,$$

e quindi, per effetto della formola (7) del § 9, in cui si sieno al solito scambiate le X nelle Z, lo dovrà essere:

$$t\, t' \left[\gamma' (Z_1 Z_2) + \gamma'' t\, (Z_1 Z_1 Z_2) + \gamma'' t' (Z_2 Z_1 Z_2) + \right.$$
$$\left. + \gamma'' \gamma' t\, t' (Z_1 Z_2 Z_1 Z_2) + \ldots\right],$$

e quindi anche, sopprimendo il fattore comune $t\, t'$, la sola quantità compresa nella precedente parentesi quadrata; si ha perciò che:

$$\gamma' (Z_1 Z_2) + \gamma'' t (Z_1 Z_1 Z_2) + \gamma'' t' (Z_2 Z_1 Z_2) + \ldots \quad (22)$$

deve essere una combinazione lineare, a coefficienti costanti, delle X, *qualunque sieno i valori dei parametri* t, t', il che porta che la medesima proprietà deve essere goduta dal solo primo termine, cioè dalla sola parentesi $(Z_1 Z_2)$; donde poi evidentemente si deduce che la stessa proprietà godranno le parentesi seguenti e quindi tutta la (22).

Ora le Z_1, Z_2 sono due *qualunque* delle trasformazioni infinitesimali comprese nella schiera (20), quindi facendole, in particolare, eguali volta per volta alle varie X, da quanto si è detto, si ricava la necessità della sussistenza delle relazioni (21). Resta così completamente dimostrato il *teorema che le relazioni* (21) *sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè le* X *sieno atte a generare un gruppo ad* r *parametri.*

Come si vede, questa dimostrazione, stabilita che si sia la formola (7) del § 9 (formola la quale può essere utilizzata per tante altre ricerche), è della più grande semplicità, ed è una dimostrazione *diretta*. Essa si trova in una mia Nota nei *Rend. dell' Istituto Lomb.* (2), t. 34, p. 1118 (1901).

È utile dimostrare qui un corollario importante del teorema precedente:

Se $X_1 \ldots X_r$ sono atte a generare un gruppo ad r parametri, anche le parentesi $(X_j X_i)$ sono delle trasformazioni infinitesimali godenti della proprietà di generare un gruppo, il quale può essere al più ad r parametri.

Infatti se si hanno le relazioni:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

e quindi anche:

$$(X_h X_k) = \sum_{t=1}^{r} c_{hkt} X_t ,$$

si ha:

$$\Big((X_j X_i), (X_h X_k)\Big) = \sum_{s,t}^{1\ldots r} c_{jis} c_{hkt} (X_s X_t),$$

cioè, formando le parentesi delle parentesi, si hanno combinazioni lineari a coefficienti costanti delle parentesi stesse, il che dimostra appunto che le $(X_j X_i)$ formano un gruppo. Poichè poi ciascuna di queste parentesi è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle X, si ricava che

una qualunque trasformazione del gruppo canonico da esse generato, è compresa fra quelle del gruppo dato; quindi il gruppo generato da $(X_j X_i)$ non può essere a più che ad r parametri. Se è a meno di r parametri, esso sarà un sottogruppo del dato, altrimenti sarà identico al dato.

§ 15. Relazioni fra le costanti c. Terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi. Struttura di un gruppo.

Fra le costanti c_{jis}, di cui si tratta nel precedente paragrafo, sussistono delle relazioni che è facile trovare.

Partendo dalle:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s , \tag{1}$$

permutando gli indici i e j, e osservando che $(X_j X_i)$ muta di segno con tal mutamento, si ha immediatamente:

$$c_{jis} + c_{ijs} = 0, \tag{2}$$

che è la prima delle relazioni che volevamo trovare.

Un' altra relazione si trova adoperando la nota formola di Jacobi (§ 8):

$$((X_j X_i) X_k) + ((X_i X_k) X_j) + ((X_k X_j) X_i) = 0$$

la quale, servendosi delle (1), diventa:

$$\sum_{s=1}^{r} [c_{jis} (X_s X_k) + c_{iks} (X_s X_j) + c_{kjs} (X_s X_i)] = 0,$$

e quindi riapplicando le medesime (1):

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{s=1}^{r}\left[c_{jis}c_{skt}+c_{iks}c_{sjt}+c_{kjs}c_{sit}\right]X_t=0,$$

e poichè le X sono indipendenti linearmente, ne viene che ciascuno dei coefficienti di X_t deve essere zero, e quindi:

$$\sum_{s=1}^{r}\left(c_{jis}c_{skt}+c_{iks}c_{sjt}+c_{kjs}c_{sit}\right)=0. \qquad (3)$$

Le relazioni (2) *e* (3) *sono le identità cui devono soddisfare le* c, *che compariscono nelle formole* (1).

L'assieme dei numeri c ha, come si vede, una assai intima relazione col gruppo generato delle r trasformazioni infinitesimali; un tale assieme si suol chiamare *struttura del gruppo* stesso, e vedremo in seguito l'importanza dell'introduzione di questo concetto, specialmente per il paragone fra loro di due gruppi e per il cosidetto isomorfismo.

Una questione importante che si presenta ora è la seguente: *dato un sistema di numeri* c_{jis} *soddisfacenti alle condizioni* (2) *e* (3), *si può affermare che esiste sempre un sistema di* r *trasformazioni infinitesimali indipendenti* X, *legate fra loro dalle* (1)?

La risposta a questa domanda è affermativa e si ha così un teorema che è da considerarsi come il reciproco di quello dimostrato al principio di questo § sulle relazioni esistenti fra le c; l'assieme del teorema diretto e del reciproco forma ciò che

si chiama *il terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi.*

Noi però non daremo per ora la dimostrazione del teorema reciproco; solo noteremo che un primo tentativo per tale dimostrazione fu fatto da LIE (*Math. Ann.*, 25, pag. 92 e seg., 1885), però le sue considerazioni erano infirmate da una grave obbiezione, (v. p. 598 del III Vol. della *Th. d. Transformationsgruppen* di LIE (1893). Una dimostrazione rigorosa fu trovata poi da LIE stesso nel 1888 (*Acc. delle Scienze di Kristiania*, 1888; v. anche *Leipz. Berichte*, 1888, pag. 14) e tale dimostrazione è riprodotta nel capitolo XIII del II Volume della sopracitata opera di LIE. Un'altra dimostrazione fu data contemporaneamente da SCHUR (*Leipzig. Berichte*, 1889, pag. 229; *Math. Ann.*, Vol. 35, pag. 179; v. anche *Math. Ann.*, Vol. 41, pag. 529, nota), ed infine per lo stesso soggetto rimandiamo alle pag. 599 e seg. del III Vol. della sopracitata *Th. d. Transf.* Ultimamente POINCARÉ ha ripreso la quistione partendo da altri punti di vista (*Comptes Rend.*, 1899, t. CXXXVIII, p. 1065, e *Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. XVIII, 1900, p. 220; *volume pubblicato in onore di* Sir G. G. STOKES), e io stesso ho dato del terzo teorema un'altra dimostrazione in un lavoro che sarà pubblicato prossimamente nei *Rend. dell' Ist. Lomb. (vedi note in fine al volume).*

§ 16. Le trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri, definite mediante un sistema di equazioni a derivate parziali.

Si abbiano le r trasformazioni infinitesimali indipendenti X_i generatrici di un gruppo canonico ad r parametri essenziali:

$$X_i = \sum_{h=1}^{n} \xi_{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}. \qquad (1)$$

La trasformazione infinitesimale più generale appartenente al gruppo, è data da una combinazione lineare a coefficienti costanti delle X_i, e quindi i coefficienti ξ di tale trasformazione sono:

$$\xi_h = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_{ih}, \qquad (2)$$

dove le λ sono quantità costanti, ovverossia indipendenti dalle x.

Immaginiamo di derivare le (2) rispetto alle singole variabili, tante volte quanto basti perchè da tutto il sistema di equazioni così ottenute, si possano eliminare le costanti λ; avremo così un sistema di equazioni a derivate parziali, di cui le ξ della formola (2) rappresentano un sistema di integrali con r costanti arbitrarie.

È evidente, per la forma speciale che le (2) hanno nelle costanti λ, che le equazioni differenziali così ottenute, sono lineari, omogenee nelle

ξ_h e nelle derivate di esse, cioè della forma:

$$\sum_{h=1}^{n} A_{\mu h} \xi_h + \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{\mu h j} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \ldots = 0, \quad (3)$$

dove A, B,... sono delle funzioni delle x, e il numero dei valori che può ricevere l'indice μ rappresenta il numero delle equazioni del sistema.

Queste equazioni definiscono coi loro integrali, le funzioni ξ, e quindi la più generale trasformazione infinitesimale appartenente al gruppo dato; si può perciò dire che esse *definiscono* il gruppo; diremo che il sistema (3) è il *sistema delle equazioni differenziali di definizione del gruppo.*

La prima questione che naturalmente qui si presenta è la seguente: dato un sistema di equazioni come (3), quando è che si può dire che esso definisce un gruppo nel modo indicato?

È chiaro che prima di tutto deve aversi che la più generale soluzione del sistema dipenda solo da un numero finito r di costanti, altrimenti non si potrebbe ottenere un gruppo finito.

Inoltre poichè sappiamo che assegnate due trasformazioni infinitesimali X_i, X_j del gruppo, l'altra $(X_i X_j)$ deve appartenere anch'essa al gruppo, perchè deve esprimersi linearmente e con coefficienti costanti mediante le trasformazioni infinitesimali del gruppo (*secondo teorema* di Lie, vedi § 14), ne viene che se:

$$\xi_{i1} \ldots \xi_{in}, \quad (4)$$

e:

$$\xi_{j1} \ldots \xi_{jn}, \quad (5)$$

sono due sistemi di soluzioni delle equazioni (3), deve essere soluzione anche il sistema formato mediante questi, nel modo seguente:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\xi_{is}\frac{\partial \xi_{j1}}{\partial x_s}-\xi_{js}\frac{\partial \xi_{i1}}{\partial x_s}\right), \ldots \sum_{s=1}^{n}\left(\xi_{is}\frac{\partial \xi_{jn}}{\partial x_s}-\xi_{js}\frac{\partial \xi_{in}}{\partial x_s}\right), \quad (6)$$

e quando ciò si verifica, allora, come si deduce dal *secondo teorema* di Lie sopracitato, le ξ sono effettivamente i coefficienti di trasformazioni infinitesimali atte a generare un gruppo.

In quanto poi all'altra condizione già supposta, che cioè la più generale soluzione del sistema dipenda da un numero finito di costanti, si dimostra che essa non solo è necessaria, ma è anche sufficiente, cioè che, se essa è soddisfatta, le costanti entrano *linearmente* nella espressione della più generale soluzione. Noi però non entreremo in questi particolari ed enuncieremo solamente il teorema:

Perchè un sistema (3) *possa definire un gruppo finito, è necessario e basta che la sua più generale soluzione dipenda da un numero finito di costanti arbitrarie, e che se* (4) *e* (5) *sono due sistemi di soluzioni, anche* (6) *lo sia.*

Immaginiamo dato un sistema (3) formato di m equazioni. Possiamo derivare i primi membri rispetto a ciascuna variabile, ed ottenere così equazioni del medesimo tipo, ma di ordini sempre superiori; derivando ν volte rispetto a tutte le variabili, si otterranno in generale $m\,n^{\nu}$ equazioni, le quali conterranno le derivate di ordine $\omega+\nu$

delle ξ, se le (3) contenevano al più le derivate di ordine ω. Le derivate di ordine $\omega+\nu$ delle n ξ sono in numero di:

$$n\binom{n+\omega+\nu-1}{\omega+\nu}, \tag{7}$$

ed è facile vedere che si può scegliere sempre un tale ν che tal numero non sia maggiore di $m\,n^{\nu}$.

Infatti il rapporto:

$$\frac{m\,n^{\nu}}{n\binom{n+\omega+\nu-1}{\omega+\nu}}, \tag{8}$$

aumentando ν di un'unità, resta moltiplicato per:

$$\frac{n\,(\omega+\nu+1)}{n+\omega+\nu},$$

e quindi aumentando ν di σ unità, il rapporto (8) resta moltiplicato per il prodotto:

$$\frac{n\,(\omega+\nu+1)}{n+\omega+\nu}\cdot\frac{n\,(\omega+\nu+2)}{n+\omega+\nu+1}\cdots\frac{n\,(\omega+\nu+\sigma)}{n+\omega+\nu+\sigma-1}. \tag{9}$$

Ora coll'aumentare di σ questo prodotto può superare qualunque numero, giacchè il limite del fattore generale:

$$\frac{n\,(\omega+\nu+\sigma)}{n+\omega+\nu+\sigma-1},$$

per $\sigma=\infty$, è n, cioè maggiore di 1.

Poniamo per brevità $\omega+\nu=s$, e rappresentiamo colla medesima lettera s, *il primo* dei nu-

meri s tali che dalle equazioni ottenute nel modo detto di sopra si possano ricavare le derivate di ordine s di tutte le ξ espresse mediante le derivate di ordine più basso; essendo lineari nelle ξ e loro derivate le equazioni da cui partiamo, è evidente che allora le derivate di ordine s resteranno espresse come funzioni lineari omogenee delle derivate di ordine più basso.

Sia $x_1^0 \ldots x_n^0$ un punto per il quale tutti i coefficienti di queste funzioni razionali sieno *regolari;* allora in un certo intorno di x^0 le ξ saranno sviluppabili in serie ordinate secondo i prodotti ad uno ad uno, a due a due, a tre a tre, ecc. delle differenze:

$$x_1 - x_1^0, \; x_2 - x_2^0, \; \ldots \; x_n - x_n^0, \qquad (10)$$

con coefficienti costanti che chiameremo rispettivamente c_i, c_{ij}, $c_{ijh}, \ldots$, dove il primo indice è quello della ξ che si sviluppa, e gli altri sono quelli delle differenze (10) che entrano come fattori nel termine.

È evidente che questi coefficienti c rappresentano i valori che per $x = x^0$ acquistano rispettivamente le derivate dei varii ordini delle ξ, quindi se sono zero tutte le c sino a quelle ad s indici, saranno per $x = x^0$, zero tutte le derivate sino a quelle di ordine $s - 1$, e poichè, per le cose dette, le derivate di ordine s, e quindi anche di ordine superiore si esprimono linearmente e omogeneamente per le precedenti, risulta che saranno zero, per $x = x^0$, le derivate di qualunque ordine delle ξ, e quindi i coefficienti c ad un numero qualunque di indici; ne viene che le ξ stesse sono zero,

e si ha perciò un sistema di valori di ξ cui non corrisponde nessuna trasformazione infinitesimale. Possiamo perciò concludere che non è possibile che gli sviluppi in serie delle ξ comincino coi termini di ordine s o di ordine superiore, cioè (vedi § 8) che fra le trasformazioni infinitesimali definite del sistema, non ve ne è alcuna di ordine s o superiore ad s.

Si ha così il teorema:

Assegnato un gruppo ad r parametri generato da r trasformazioni infinitesimali indipendenti, si può sempre trovare un numero s tale che una qualunque delle infinite trasformazioni infinitesimali del gruppo, sia, per un punto arbitrario dello spazio, di ordine sempre inferiore ad s.

Esiste cioè un limite superiore per l'ordine di una trasformazione infinitesimale appartenente ad un gruppo finito.

CAPITOLO II.

Teoria generale dell'invariantività rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

§ 1. Invariantività di una funzione rispetto ad un gruppo. Invarianti di un gruppo.

Si abbia una funzione $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$, delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, e sia dato un gruppo. Diremo che quella funzione è *un' invariante del gruppo*, ovvero che essa *ammette tutte le trasformazioni del gruppo*, ovvero che essa *appartiene al gruppo,* quando essa resta invariata per tutte le trasformazioni del gruppo stesso.

Supponendo prima di tutto che si tratti di un gruppo ad un sol parametro, è facile ricercare qual'è la condizione necessaria e sufficiente perchè F sia un invariante; ricordando la formola (v. Cap. I, § 6):

$$F(x') = F(x) + \frac{t}{1} X(F(x)) + \frac{t^2}{2!} X^2(F(x)) + \ldots,$$

si vede che, perchè sia:

$$F(x') = F(x),$$

per qualunque valore di t, bisogna che $X(F(x))$ sia zero; e d'altra parte se $X(F(x))$ è zero, sarà anche $X^2(F(x)) = 0$, $X^3(F(x)) = 0$, ecc.

Possiamo perciò enunciare il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $F(x)$ sia invariante rispetto ad un gruppo ad un sol parametro, è che essa sia soluzione dell'equazione a derivate parziali, lineare, omogenea di primo ordine $XF = 0$.

Quando ciò si verifica si suole anche dire che *la funzione F ammette la trasformazione infinitesimale X.*

Se ora supponiamo che si tratti di un gruppo ad r parametri (v. Cap. I, § 13), è evidente, colle analoghe considerazioni, che, perchè F sia invariante, bisogna e basta che ammetta ciascuna delle r trasformazioni infinitesimali del gruppo stesso, e perciò:

Perchè $F(x)$ sia invariante rispetto ad un gruppo ad r parametri essenziali, bisogna e basta che essa sia una delle soluzioni comuni del sistema completo:

$$X_1 F = 0, \quad X_2 F = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_r F = 0.$$

Ricordando che se una funzione F è soluzione di una equazione $X_1 F = 0$ e di un'altra $X_2 F = 0$, lo è anche dell'equazione $(X_1 X_2) F = 0$, si ha:

Se F è invariante per due gruppi generati rispettivamente dalle trasformazioni infinitesimali X_1 X_2, lo sarà anche pel gruppo generato dalla trasformazione infinitesimale $(X_1 X_2)$.

Per altre considerazioni sugli invarianti di un gruppo, vedi Cap. III, § 1 e 2.

§ 2. Invariantività di un sistema di equazioni finite rispetto ad un gruppo.

Si abbia una equazione $\Omega(x_1 \ldots x_n) = 0$ la quale rappresenti una relazione fra le variabili, che resti inalterata per le trasformazioni di un gruppo; diremo che *l'equazione* $\Omega = 0$ *è invariante* per le trasformazioni del gruppo.

Considerando la rappresentazione geometrica dell'equazione $\Omega = 0$, si ha una varietà dello spazio ad n dimensioni; quando l'equazione $\Omega = 0$ è invariante, nel senso sopradetto, allora, per le trasformazioni del gruppo, da un punto di tale varietà si passa sempre ad un altro della medesima varietà, si ha cioè, geometricamente, una varietà che *si trasforma in sè stessa* per le trasformazioni del gruppo, *una varietà invariante.*

È evidente che quando una funzione è invariante nel senso del § precedente, essa, eguagliata a zero, o, in generale, ad una costante, dà sempre luogo ad una varietà invariante, e quindi si ha allora una serie semplicemente infinita di varietà invarianti; ma viceversa da una di siffatte varietà non si ricava una funzione invariante.

Vogliamo ora, come sopra ricercare, la condizione necessaria e sufficiente perchè una equazione sia invariante rispetto al gruppo; anzi, per maggiore generalità, considereremo il caso non di una sola equazione, ma di un sistema di $n - m$ di esse,

$\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_{n-m} = 0$, su cui facciamo naturalmente l'ipotesi che esse sieno compatibili, ed inoltre che non tutti i determinanti di ordine $n - m$ della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

sieno zero per effetto delle equazioni date, cioè che questa matrice, per effetto delle equazioni date, abbia per caratteristica $n - m$.

Se le equazioni date devono formare un sistema invariante, in rapporto al gruppo generato dalla trasformazione infinitesimale:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2}$$

il sistema delle equazioni:

$$\Omega_1 (x') = 0, \ldots \Omega_{n-m} (x') = 0,$$

cioè il sistema:

$$\Omega_1 (x) + \frac{t}{1} X \Omega_1 (x) + \ldots = 0$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\Omega_{n-m} (x) + \frac{t}{1} X \Omega_{n-m} (x) + \ldots = 0,$$

deve essere equivalente al sistema dato, e perciò

non hanno, secondo le nostre notazioni, significato diverso da quello di:

$$\frac{\partial [F]}{\partial \varphi_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial [F]}{\partial x_i},$$

perchè in $[F]$ la sostituzione delle (5) è stata già fatta.

Ora per $i \leqq n - m$, si ha:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial [F]}{\partial \varphi_i},$$

dunque:

$$\left.\begin{aligned} [XF] - [X[F]] &= \sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] \{ [X x_i] - [X \varphi_i] \} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] [X(x_i - \varphi_i)]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Questa è la formola di identità che volevamo trovare; poniamo in essa:

$$F = \Omega_k,$$

e osserviamo che essendo $[\Omega_k] = 0$, sarà $X[\Omega_k] = 0$, e quindi anche $[X[\Omega_k]] = 0$, ed essendo $X\Omega_k = 0$, sarà $[X\Omega_k] = 0$; si avrà dunque:

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i}\right] [X(x_i - \varphi_i)] = 0 \quad (k = 1, \ldots n - m) \quad (8)$$

Ora per ipotesi il determinante:

$$\left| \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} \right| \qquad (k, i = 1, \ldots n - m)$$

è diverso da zero, anche in forza delle equazioni date, cioè delle (5), e quindi anche il determinante:

$$\left| \left[\frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} \right] \right|,$$

è diverso da zero, e perciò dalle (8) si ricava:

$$[X(x_i - \varphi_i)] = 0.$$

Tornando perciò alla formola (7), essa si riduce semplicemente a:

$$[XF] - [X[F]] = 0, \qquad (9)$$

valevole qualunque sia la funzione F.

Se noi ora nella (9) poniamo $F = X\Omega_k$, e ammettiamo che le (3) sussistano in forza delle equazioni date, cioè che sia identicamente, per qualunque k:

$$[X\Omega_k] = 0,$$

e quindi:

$$X[X\Omega_k] = 0, \qquad [X[X\Omega_k]] = 0,$$

risulta:

$$[X \,.\, X\Omega_k] = [X^2\Omega_k] = 0,$$

cioè le equazioni $X^2\Omega_k = 0$ (e similmente si dimostrerebbe per le $X^3\Omega_k = 0, \ldots$) sono conseguenza del sistema dato, come si voleva dimostrare.

Si ha perciò il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di equazioni $\Omega_1(x) = 0, \ldots \Omega_{n-m}(x) = 0$ *(di cui non sia zero la matrice delle derivate di primo ordine rispetto a tutte le variabili) sia in-*

variante rispetto al gruppo ad un sol parametro generato dalla trasformazione infinitesimale X, *è che le equazioni* $X\Omega_1 = 0, \ldots X\Omega_{n-m} = 0$ *sieno conseguenza delle equazioni date.*

Se ora si ha un gruppo a più parametri, generato quindi da r trasformazioni infinitesimali $X_1 \ldots X_r$, ricordando che le trasformazioni di tal gruppo potranno scriversi come quelle di un gruppo ad un sol parametro generato dalla $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$, si deduce evidentemente che per l'invariantività del sistema di equazioni è sempre *necessario e sufficiente* che sieno zero, mediante le equazioni date, i risultati dell'applicazione di ciascuna X su ciascuna Ω; quindi *il teorema precedente vale non solo per i gruppi generati da una sola trasformazione infinitesimale, ma anche per quelli generati da r di esse.*

Le precedenti considerazioni sono fatte nell'ipotesi che la matrice (1) sia diversa da zero. Il teorema non sussiste più in generale se tale condizione non è soddisfatta; non crediamo però di addentrarci nella discussione del teorema in questo altro caso e rimandiamo alle pagine 112-115 del 1° Vol. della *Th. der Transform.* di Lie.

Il risultato cui si arriva è il seguente:

Se la matrice (1) *è zero, allora per l'invariantività del sistema non è più sufficiente che le equazioni* $X\Omega_j = 0$ *sieno conseguenza delle* $\Omega_j = 0$ *(pur restando queste sempre naturalmente condizioni necessarie), ma una condizione* SUFFICIENTE

è espressa in generale da ciò, che le $X\Omega_j$ si possano esprimere linearmente mediante le Ω_j stesse, con coefficienti che sieno funzioni regolari per tutti quei sistemi di valori delle x, per i quali le Ω si annullano.

È evidente che questo teorema contiene come caso particolare il precedente, perchè se si verifica la anzidetta esprimibilità, si ha ancora che le $X\Omega_j = 0$ sono conseguenza delle equazioni $\Omega_j = 0$; ma viceversa potrebbe aversi ciò senza che si abbia l'esprimibilità lineare delle $X\Omega_j$ per mezzo delle Ω.

È importante notare ora il seguente teorema:

Se un sistema di equazioni è invariante rispetto ad un gruppo di cui la trasformazione infinitesimale è X_j, e rispetto all'altro di cui la trasformazione infinitesimale è X_i, lo sarà rispetto a quello di trasformazione infinitesimale (X_j, X_i).

La dimostrazione di ciò si fa come quella dell'analogo teorema del § prec.; se le equazioni $X_j\Omega_k = 0$ e $X_i\Omega_k = 0$ sono conseguenza delle equazioni $\Omega_k = 0$, sarà anche:

$$X_j X_i \Omega_k - X_i X_j \Omega_k = 0$$

cioè $(X_j X_i)\Omega_k = 0$ sarà conseguenza del sistema $\Omega_k = 0$, e quindi è evidente l'assunto.

Prima di terminare questo §, vogliamo notare che spesse volte per dire che il sistema è invariante rispetto al gruppo generato dalla trasformazione infinitesimale X_i, si dice più semplicemente che il sistema *ammette la trasformazione infinitesimale* X_i.

§ 3. Cenni sul problema di determinare tutti i possibili sistemi di equazioni, che ammettono una o più date trasformazioni infinitesimali.

Dal § precedente risulta che la determinazione dei sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo ad uno o più parametri, si riduce in sostanza a quella di funzioni su cui applicando i simboli delle trasformazioni infinitesimali generatrici di quei gruppi e tenendo conto dell'annullarsi delle medesime funzioni, si abbia identicamente zero, o, come si dice, di *equazioni che ammettono le date trasformazioni infinitesimali.* Si presenta quindi naturale la risoluzione del problema di cui si parla nel titolo di questo §. Noi ci limiteremo solo ad alcuni cenni.

Sia data una sola trasformazione infinitesimale:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad (1)$$

Un sistema qualunque di $n - m$ equazioni:

$$\Omega_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \Omega_{n-m} = 0, \qquad (2)$$

della specie detta, o potrà essere tale che le altre equazioni:

$$\xi_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \xi_n = 0, \qquad (3)$$

non sieno *tutte* conseguenza di esse, ovvero che lo sieno tutte.

Nel primo caso, se noi indichiamo con:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \ldots \ldots, \varphi_{n-1},$$

gli $n-1$ integrali indipendenti della equazione $XF=0$, è facile dimostrare che i primi membri delle (2) devono essere funzioni delle φ. Giacchè supposto che almeno ξ_n sia, anche tenendo conto delle (2), diverso da zero, prendendo come nuove variabili, in luogo delle $x_1 \ldots x_{n-1}$, le $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$, la (1) (come sappiamo, v. Cap. I, § 7) si riduce alla forma:

$$X = \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{4}$$

Ora introduciamo nelle Ω le φ; se una di esse p. es. Ω_k risultasse anche funzione di x_n, risolvendola rispetto ad x_n, si avrebbe l'equazione equivalente:

$$x_n - \omega_k(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}) = 0;$$

ma deve essere:

$$X\Omega_k = 0,$$

ed inoltre X ha ora acquistato la forma (4), perciò dovrebbe aversi $\xi_n = 0$, contro l'ipotesi. Tutte le Ω dovranno dunque riuscire funzioni delle sole φ, e d'altra parte è chiaro che prendendo $n-m$ funzioni arbitrarie delle φ, si ha sempre una soluzione del problema.

Dunque: *se si vogliono tutti i possibili sistemi di N equazioni che ammettono una data trasformazione infinitesimale X, di cui l'annullarsi dei*

coefficienti ξ non sia una conseguenza delle equazioni stesse, è necessario e basta prendere arbitrariamente N funzioni degli $n-1$ integrali indipendenti di $XF=0$.

Se ora l'annullarsi delle $\xi_1 \ldots \xi_n$ deve essere invece conseguenza delle equazioni del sistema invariante, allòra supposto naturalmente che le equazioni $\xi_1 = 0 \ldots \xi_n = 0$ sieno compatibili, cioè che esista almeno un sistema di valori delle x che le soddisfi, e' che questo sistema di valori delle x sia compreso nel campo in cui esse si immaginano *regolari*, e supposto in generale che di esse solamente le prime m sieno indipendenti, cioè che le altre sieno conseguenza delle prime m, è chiaro che si otterrà il cercato sistema invariante di N equazioni considerando, prima di tutto, le equazioni $\xi_1 = 0 \ldots \xi_m = 0$, e poi altre $N-m$ arbitrarie equazioni, le quali non sieno però incompatibili con le precedenti.

Essendo qui supposta data una sola trasformazione infinitesimale, il problema trattato si riduce alla *determinazione di tutti i sistemi di equazioni invarianti per le trasformazioni di un gruppo ad un sol parametro.*

Vogliamo ora dare un cenno della risoluzione del medesimo problema, nel caso in cui sieno date *più* trasformazioni infinitesimali.

Prima di tutto si sa (v. Cap. II, § 2) che se un sistema di equazioni ammette due trasformazioni infinitesimali X_1 e X_2, ammette anche la $(X_1 X_2)$, e quindi, date q trasformazioni infinitesimali, rispetto

a cui debba esser invariante un sistema di equazioni, si possono aggiungere tutte le altre trasformazioni infinitesimali ottenute colle combinazioni $(X_j\, X_i)$, e seguitare così finchè l'assieme di tutte le equazioni differenziali ottenute eguagliando a zero tutte le X, sia un sistema completo (v. Cap. I, § 9). Possiamo dunque sempre supporre che le q trasformazioni infinitesimali date, eguagliate a zero. formino un sistema completo, o più generalmente che fra le q date ve ne siano $q - r$ che sieno combinazioni lineari (a coefficienti variabili) delle altre e r che sieno fra loro indipendenti e che eguagliate a zero formino un sistema completo.

Risulta allora che, chiamando al solito con $\xi_{j1}, \ldots \xi_{jn}$, i coefficienti di X_j, la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \ldots & \xi_{qn} \end{matrix} \right\|, \qquad (5)$$

avrà per caratteristica r.

I sistemi di equazioni $\Omega = 0$ che vogliamo ricercare, sono, come sopra, di due specie, e cioè quelli tali che l'annullarsi di tutti i determinanti di ordine r della matrice (5), *non* sia conseguenza delle equazioni stesse, e quelli per cui l'annullarsi dei detti determinanti sia una conseguenza delle equazioni.

In un modo perfettamente analogo a quello seguito di sopra, cioè introducendo, in luogo delle variabili x, le $n - r$ variabili φ che sieno le soluzioni del sistema completo delle r equazioni

$X_1 = 0 \ldots X_r = 0$, e facendo vedere che le Ω devono ridursi funzioni delle sole φ, si ha:

Per ottenere tutti i possibili sistemi di N equazioni $\Omega = 0$, invarianti rispetto ad un assieme di q trasformazioni infinitesimali $X_1 \ldots X_q$, di cui le prime r eguagliate a zero formino un sistema completo, e le altre sieno combinazioni lineari delle precedenti, e di cui l'annullarsi di tutti i determinanti di ordine r della matrice dei coefficienti, non sia una conseguenza delle $\Omega = 0$, è necessario e basta eguagliare a zero N funzioni arbitrarie delle $n - r$ soluzioni del sistema completo:

$$X_1 = 0 \ldots\ldots\ldots X_r = 0.$$

In quanto poi ai sistemi di equazioni della seconda specie, essi possono dividersi in varie classi; possiamo supporre che conseguenza delle equazioni del sistema, sia l'annullarsi non solo di tutti i determinanti di ordine r della matrice (5), ma anche l'annullarsi di tutti i determinanti di ordine $r - 1$, $r - 2, \ldots r - h + 1$; quindi per quanti sono i valori di h, si hanno altrettante sottoclassi, cioè r.

Stabilito allora un valore di h, si calcolino tutti i determinanti di ordine $r - h + 1$ della matrice (5). Ora può avvenire che l'annullarsi di tutti tali determinanti, porti con sè l'annullarsi anche di tutti i determinanti di ordine $r - h$, ovvero che l'annullarsi dei medesimi determinanti d'ordine $r - h + 1$ avvenga per valori delle x, esterni al campo in cui si suppone che le date funzioni ξ sieno regolari.

Verificandosi uno di questi casi, è evidente che non esiste il sistema di equazioni che si vuol trovare e corrispondente al numero h. Se invece non si verifica alcuno dei casi suindicati, allora l'annullarsi dei determinanti di ordine $r - h + 1$ potrà in generale dipendere dall' annullarsi di un certo numero minimo ρ di altre funzioni Ξ delle x; ed in generale potrà in varii modi trovarsi questo sistema *irriducibile* di equazioni $\Xi_1 = 0, \ldots \Xi_\rho = 0$.

Fissato allora uno di tali sistemi irriducibili, e propriamente uno donde non risulti l'annullarsi di tutti i determinanti di ordine $r - h$ della matrice (5), formiamo il sistema di equazioni:

$$\Xi_i = 0, \quad X_k \Xi_i = 0, \quad X_j X_k \Xi_i = 0 \ldots \qquad (6)$$

e seguitiamo così, finchè o si ottengano equazioni conseguenza delle precedenti, e che noi allora trascuriamo, ovvero equazioni che o sieno incompatibili con le precedenti, o sieno soddisfatte per valori delle x esterni al solito campo in cui le ξ si immaginano regolari. In questi ultimi casi non esiste evidentemente il sistema di equazioni che vogliamo ricercare, mentre nel primo caso si viene, col procedimento indicato, a costruire un sistema di equazioni che ammette tutte le trasformazioni infinitesimali X_i e ciò per il modo stesso con cui abbiamo costruito le (6).

Il sistema (6) così costruito potrà in generale ridursi ad un sistema più ristretto di equazioni, in modo cioè che, soddisfatte tutte le equazioni di tal sistema ridotto, restino soddisfatte anche tutte quelle del sistema (6); tal sistema ridotto, deve però certamente comprendere tutte le $\Xi_i = 0$,

e ciò per il modo stesso con cui abbiamo formato le Ξ_i.

Sia perciò:

$$\Xi_1 = 0, \dots \Xi_\varrho = 0, \quad \Xi_{\varrho+1} = 0, \dots \Xi_{\varrho+\sigma} = 0, \tag{7}$$

il sistema ridotto.

Ammesso che dalle (7) *non risulti l'annullarsi dei determinanti di ordine* $r-h$ *della matrice* (5), *il sistema* (7) *rappresenta un sistema della specie cercata, appartenente al numero* h, *ed irriducibile.*

Ma quale sarà il più generale sistema della indicata specie e che comprenda il (7)? In altri termini quali altre equazioni possiamo aggregare a quelle di (7), in modo che si conservi la proprietà del sistema (7) stesso?

Supponiamo che un determinante di ordine $r-h$, che non sia zero per effetto delle (7), sia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{1,n-r+h+1} & \dots & \xi_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r-h,n-r+h+1} & \dots & \xi_{r-h,n} \end{vmatrix};$$

se noi formiamo un qualunque sistema di equazioni, che ammetta le $X_1 \dots X_q$, e che non annulli Δ, aggregando tal sistema a (7), abbiamo un sistema avente le medesime proprietà del sistema (7) e ripetendo la medesima operazione per tutti i Δ diversi da zero, si hanno tutti i sistemi richiesti. Ora è facile, prima di tutto, vedere che dalle (7) non potrà ricavarsi una relazione solo fra $x_{n-r+h+1}, \dots x_n$, perchè se si potesse ricavare:

$$x_n - \psi(x_{n-r+h+1} \dots x_{n-1}) = 0, \tag{8}$$

applicando su questa le $X_1 \ldots X_{r-h}$, e dovendo avere per risultato sempre zero, si otterrebbe un sistema di equazioni lineari nelle derivate di ψ, le quali, dovendo coesistere in forza delle (7), darebbero l'annullarsi, per mezzo delle (7), del determinante Δ (che è proprio il determinante di tali equazioni lineari), contro l'ipotesi.

Ricaviamo perciò che il numero $\rho + \sigma$ delle equazioni (7) non può essere maggiore di $n - r + h$, perchè se fosse maggiore di tal numero, eliminando dalle (7) le $x_1 \ldots x_{n-r+h}$, si avrebbe una relazione come (8); onde:

$$\rho + \sigma \leqq n - (r - h). \tag{9}$$

Risolviamo allora le (7) rispetto ad $x_1 \ldots x_{\rho+\sigma}$, ed otteniamo il sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1 (x_{\varrho+\sigma+1} \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\varrho+\sigma} = \varphi_{\varrho+\sigma} (x_{\varrho+\sigma+1} \ldots x_n), \end{array}\right\} \tag{10}$$

che può sostituirsi a (7).

Mediante queste formole, noi possiamo sempre immaginare che le cercate altre equazioni da aggregare a (7), non contengano che solo le variabili:

$$x_{\varrho+\sigma+1}, \ldots\ldots\ldots x_n,$$

e che le Ξ sieno anch'esse trasformate a contenere solo queste medesime variabili. Osservando poi d'altra parte che delle X basterà limitarsi a considerarne solo $r - h$, perchè fra $r - h + 1$ di esse, sussisterà sempre, per effetto delle (7), una

relazione lineare, essendo supposti zero tutti i determinanti di ordine $r - h + 1$ della matrice (5), si vede in conclusione che il problema della ricerca delle altre equazioni da aggregare alle (7), si riduce a quello della ricerca di tutti i sistemi di equazioni fra sole $n - \rho - \sigma$ variabili e che ammettano $r - h$ trasformazioni infinitesimali espresse nelle medesime variabili; un problema, come si vede, della stessa specie di quello che consideravamo in principio, ma con un numero inferiore di variabili e di trasformazioni infinitesimali.

Resta così esaurita la discussione del problema generale propostoci in questo paragrafo.

§ 4. Caso in cui le trasformazioni infinitesimali date godono di una certa proprietà, o, più particolarmente, sono atte a generare un gruppo ad r parametri. Sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo ad r parametri.

Abbiamo visto nel § prec. come si possano determinare tutti i sistemi di equazioni che ammettono certe date q trasformazioni infinitesimali, e dalla cui sussistenza risulti l'annullarsi di tutti i minori di ordine $r - h + 1$ della matrice delle ξ, e non l'annullarsi dei minori di ordine $r - h$. Calcolando tutti i minori di ordine $r - h + 1$, eguagliandoli a zero, trascurando tutte quelle fra tali equazioni che sono conseguenza delle altre, e cercando, se ciò è possibile, un sistema di equazioni

più ridotto, donde si deducano tutte quelle già costruite, si ottiene un sistema irriducibile, il quale però, nel caso generale, non rappresenta un sistema avente le proprietà richieste, e per ottenere invece questo, sarà necessario aggregare altre equazioni, della cui costruzione ci siamo occupati nel § precedente.

Ora vogliamo esaminare un caso in cui un sistema ottenuto semplicemente nel modo qui indicato, cioè eguagliando a zero tutti i minori di ordine $r-h+1$ della solita matrice, e indi operando le opportune riduzioni, rappresenta già da sè un sistema godente delle indicate proprietà, per modo che in tal caso resterà notevolmente ridotta la ricerca di cui abbiamo trattato in generale nel § precedente.

Sieno date, come avanti, le q trasformazioni infinitesimali, fra le quali se ne possano scegliere, come sopra, r corrispondenti ad un sistema completo, mentre le altre $q-r$ si esprimano linearmente (a coefficienti variabili) mediante queste. Se quelle r corrispondono ad un sistema completo, ciò vorrà dire che sussisteranno le relazioni:

$$(X_j\, X_i) = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{jis}(x)\, X_s\,, \tag{1}$$

dove le γ sono in generale funzioni delle x, regolari in un certo campo. Poniamo eguali a zero tutti i determinanti di ordine $r-h+1$ della matrice delle ξ; supponiamo che si abbia un sistema di equazioni compatibili; riduciamole al minimo numero e alla più semplice espressione, e imma-

giniamo di considerare l'assieme di tutti i sistemi di valori delle x per i quali tali equazioni sieno soddisfatte, supposto al solito che tale assieme faccia parte del campo in cui le ξ si immaginano regolari.

Se ora noi supponiamo *che il campo in cui sono regolari le sopradette funzioni* γ, *comprenda questo nel quale si annullano tutti i suddetti determinanti di ordine* $r - h + 1$, *si può far vedere che il sistema costruito di equazioni, ammette tutte le trasformazioni infinitesimali date.*

Per dimostrare ciò ricorreremo al teorema enunciato alla fine del § 2, cioè che perchè un sistema di equazioni ammetta ciascuna delle trasformazioni infinitesimali X, è *sufficiente* che la X applicata a ciascuna delle equazioni del sistema, dia per risultato una combinazione lineare dei primi membri delle equazioni stesse, *con coefficienti che sieno però funzioni regolari nel campo di tutti quei sistemi di valori che soddisfano contemporaneamente le equazioni.*

Indichiamo con $D_1, D_2, \ldots$ i determinanti di ordine $r - h + 1$ della matrice delle ξ, e applichiamo una X_j su di una D, che, per fissare le idee, supponiamo p. es. che sia quella delle prime $r - h + 1$ linee, e delle prime altrettante colonne. Possiamo scrivere:

$$X_j D = \sum_{i=1}^{r-h+1} \sum_{\nu=1}^{r-h+1} X_j \xi_{i\nu} \frac{\partial D}{\partial \xi_{i\nu}}, \tag{2}$$

e osserviamo che le derivate $\frac{\partial D}{\partial \xi_{i\nu}}$, non sono che i

complementi algebrici degli elementi $\xi_{i\nu}$ nel determinante D.

Ora da (1) si ha:

$$X_j \xi_{i\nu} - X_i \xi_{j\nu} = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{jis} \xi_{s\nu},$$

cioè:

$$X_j \xi_{i\nu} = \sum_{s=1}^{n} \xi_{is} \cdot \frac{\partial \xi_{j\nu}}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^{r} \gamma_{jis} \xi_{s\nu},$$

e sostituendo in (2) si ha:

$$\left.\begin{aligned} X_j D = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{r-h+1} \frac{\partial \xi_{j\nu}}{\partial x_s} \sum_{i=1}^{r-h+1} \xi_{is} \frac{\partial D}{\partial \xi_{i\nu}} + \\ + \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{r-h+1} \gamma_{jis} \sum_{\nu=1}^{r-h+1} \xi_{s\nu} \frac{\partial D}{\partial \xi_{i\nu}}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ora le espressioni:

$$\sum_{i=1}^{r-h+1} \xi_{is} \frac{\partial D}{\partial \xi_{i\nu}} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{r-h+1} \xi_{s\nu} \frac{\partial D}{\partial \xi_{i\nu}},$$

non sono altro che somme di prodotti di complementi algebrici degli elementi di una colonna o di una linea di D, per gli elementi di una colonna o linea parallela presa o in D stesso, o più generalmente nelle due matrici che sono parti della matrice totale delle ξ, e la cui intersezione è precisamente il determinante D. Le suddette somme sono perciò, secondo i valori di s, o zero, o eguali a D stesso, o infine eguali a determinanti di ordine $r - h + 1$ compresi nelle suddette due matrici.

Si vede quindi da (3) che $X_j D$ si esprimerà linearmente mediante le D stesse, con coefficienti che sono somme di termini come $\frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_s}$, e γ_{jis}. Per le ipotesi fatte, poichè le derivate delle ξ sono naturalmente regolari nel campo in cui sono regolari le ξ, e poichè in tal campo è supposto compreso quello in cui si annullano tutte le D, e in questo ultimo si suppongono regolari le γ, applicando il teorema suindicato, si ricava che le equazioni $D = 0$ ammettono tutte le trasformazioni infinitesimali X.

Un caso particolare di questo teorema è sommamente interessante ed è quello in cui le r trasformazioni infinitesimali sieno atte a generare un gruppo ad r parametri, il che avviene allora e solo allora che le suindicate funzioni γ sono costanti. In tal caso è naturalmente sempre soddisfatta la condizione della regolarità delle γ, e quindi è applicabile il teorema anzidetto. Abbiamo perciò l'importante risultato:

Date q trasformazioni infinitesimali, delle quali r sieno atte a generare un gruppo ad r parametri, e le altre sieno combinazioni lineari (a coefficienti variabili) delle prime, eguagliando a zero tutti i minori di ordine $r - h + 1$ della matrice delle ξ, riducendo tali equazioni al minimo numero e alla più semplice espressione e supposto che il campo in cui tali equazioni sono soddisfatte appartenga a quello di regolarità delle ξ, si ha senz'altro un sistema di equazioni che ammette tutte

le trasformazioni infinitesimali date, e quindi poi, ricordando quanto abbiamo detto nel § 2, si ha anche che *il suddetto sistema di equazioni è invariante per tutte le trasformazioni del gruppo ad r parametri generato dalle r trasformazioni infinitesimali.*

Di questo teorema importante che completa per i gruppi a più parametri generati da trasformazioni infinitesimali, la facile ricerca fatta per i gruppi ad un parametro nella prima parte del § 3, sono contenute tre dimostrazioni nell'Opera di Lie *(Th. d. Transformat.*, vol. I, pag. 228, 239, 241). A noi è parso più conveniente disporlo come corollario di un teorema assai più generale che il Lie stesso dà alle pag. 244-245, con una dimostrazione che è in sostanza la stessa di quella da noi riportata.

Col suddetto teorema si vengono a costruire dei sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo ad r parametri, prendendo però le mosse dalle trasformazioni infinitesimali del gruppo stesso.

Non vogliamo però mancare di osservare in che modo potrebbero costruirsi anche consimili sistemi, quando si faccia astrazione dalle trasformazioni infinitesimali del gruppo (le quali potrebbero essere anche non possedute da esso) e si immagini invece di conoscere le formole finite delle trasformazioni del gruppo.

Poniamo in queste per $x_1 \dots x_n$ dei valori fissi, $x_1^0 \dots x_n^0$, e per le x'_i le x_i, e si abbiano così le formole:

$$x_i = f_i\,(x^0,\ a_1\,a_2 \dots a_r). \qquad (4)$$

Facendo variare le a in tutti i modi possibili, si hanno infiniti sistemi di valori per le x, che rappresenteranno le coordinate degli infiniti punti in cui si trasforma il punto $x_1^0 \dots x^0_n$. Sia $y_1 \dots y_n$ uno di tali punti, quello p. es. ottenuto coi valori $a_1 \dots a_r$ dei parametri, ed applichiamo ad esso una trasformazione del gruppo, p. es. quella coi parametri $b_1 \dots b_r$; si otterrà il punto:

$$z_i = f_i\,(y,\ b_1 \dots b_r) = f_i\,(f\,(x^0,\ a),\ b),$$

ed avendo supposto che le trasformazioni formino un gruppo, ne viene:

$$z_i = f_i\,(x^0,\ c),$$

cioè il punto $z_1 \dots z_n$ è un altro dei punti in cui si trasforma $x_1^0 \dots x^0_n$. Ne risulta che l'assieme di tutti tali punti, sarà rappresentato da un sistema di equazioni invarianti rispetto al gruppo. Ora tal sistema di equazioni lo si trova subito eliminando le a fra le (4), e quindi si ha un mezzo per trovare così tutti i sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo, quando sono conosciute le equazioni finite di questo; è da osservarsi che per seguire questo metodo non è necessario supporre che il gruppo dato possegga la trasformazione identica e quindi trasformazioni infinitesimali.

§ 5. Rappresentazione geometrica dei sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo. Sottogruppo di stabilità di un punto.

È utile ora esaminare il significato geometrico che hanno molti dei precedenti risultati, allo scopo anche di ritrovarne dei nuovi, dal punto di vista geometrico.

Un sistema di equazioni, quando le x si interpretano come le coordinate di un punto di uno spazio ad n dimensioni, rappresenta una varietà, in questo spazio, di un numero minore di dimensione.

Se il sistema di equazioni ammette la trasformazione infinitesimale X, e quindi (v. § 2) è invariante rispetto al gruppo ad un sol parametro generato da X, per le trasformazioni di tal gruppo, un punto della varietà geometrica rappresentata da quel sistema di equazioni, si trasforma in un punto della varietà stessa; ma siccome sappiamo che in generale un punto si trasforma in un altro appartenente alla traiettoria passante per esso (v. Cap. I, § 7), così ne deduciamo che tutta questa traiettoria appartiene alla varietà, cioè *la varietà geometrica invariante sarà in generale il luogo di infinite traiettorie (naturalmente in particolare potrebbe anche risultare di una traiettoria sola).*

Si ricava quindi il significato geometrico della soluzione del problema trattato sul principio del § 3, dove abbiamo visto che per trovare un sistema di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo, bisogna appunto considerare un sistema di equazioni arbitrarie fra gli integrali $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, i quali, come sappiamo, eguagliati a costanti fisse, rappresentano precisamente le equazioni generali delle traiettorie.

Ma può darsi il caso che la traiettoria di un punto si riduca al punto stesso, cioè che il punto resti inalterato in sè per tutte le trasformazioni del gruppo; ciò si ha quando per quel punto tutti i coefficienti ξ della X si annullano; se quindi tutti i punti della varietà geometrica, sono di tale specie, allora questa è invariante non solo nella sua totalità, ma in ciascuna sua parte, e anzi in ciascun suo punto, ed il sistema di equazioni che essa rappresenta contiene il sistema di tutte le equazioni $\xi = 0$. Abbiamo così il secondo dei casi considerati sul principio del § 3.

Consideriamo un punto della varietà invariante e operiamo una trasformazione infinitesima; quel punto si sposterà lungo la tangente alla traiettoria passante per esso; ma poichè la traiettoria appartiene alla varietà, tale direzione di spostamento sarà tangente alla varietà stessa; se poi il punto è della seconda specie dianzi considerata, allora esso non si sposterà secondo alcuna direzione: possiamo perciò dire che *una varietà sarà o no invariante rispetto al gruppo generato da X secondo che risulta o no di punti a ciascuno dei quali o non è coordinata alcuna direzione mediante la*

trasformazione infinitesima X (punti cioè che la trasformazione X lascia *stabili* (v. Cap. I, § 8), *ovvero vi è, mediante* X, *coordinata una direzione tangente alla varietà stessa.*

Sieno date q trasformazioni infinitesimali:

$$X_1 \dots X_q .$$

Sappiamo che i sistemi di equazioni che ammettono quelle q trasformazioni infinitesime possono classificarsi secondo l'ordine massimo dei determinanti della matrice delle ξ, che, mediante le equazioni del sistema, risultano diversi da zero (v. § 4); sia $r - h$ tale ordine massimo, supposto al solito che r sia il numero di quelle X che corrispondono ad un sistema completo, mentre le altre $q - r$ si esprimano linearmente per esse.

Essendo i coefficienti ξ di ciascuna X proporzionali ai coseni della direzione, in cui si sposta di infinitamente poco un punto per effetto della trasformazione medesima X, ed essendo zero, per tutti i punti della varietà, tutti i determinanti di ordine $r - h + 1$ della matrice delle ξ, ne viene che le direzioni di spostamento di tutti tali punti, per effetto di tutte le X, si riducono ad $r - h$ *indipendenti*, e reciprocamente se tali direzioni si riducono ad $r - h$ *indipendenti*, allora evidentemente per tali punti non potranno essere tutti zero i minori di ordine $r - h$ della solita matrice delle ξ.

La varietà deve essere, come sopra, tangente a ciascuna di queste $r - h$ direzioni indipendenti, e quindi essa deve avere almeno $r - h$ dimensioni; abbiamo dunque:

Ogni sistema di equazioni che ammette le q trasformazioni infinitesime date, e per effetto di cui la matrice delle ξ acquista la caratteristica $r-h$, è rappresentato da una varietà di almeno $r-h$ dimensioni, ai cui punti sono coordinate per mezzo delle $X_1 \ldots X_q$, esattamente $r-h$ direzioni indipendenti tangenti alla varietà stessa.

Immaginiamo ora di considerare una varietà invariante rispetto ad un gruppo ad r parametri, e vediamo prima di tutto come possiamo costruire geometricamente una tal varietà.

Assumiamo un punto dello spazio ed applichiamo ad esso tutte le trasformazioni del gruppo, nello stesso modo tenuto alla fine del § prec. Sappiamo già che *l'assieme di tutti i punti in cui si trasforma il dato forma una varietà invariante rispetto al gruppo.*

Si può far vedere che *tale varietà non è riducibile in parti minori*, ovverossia *che da un punto di essa si può sempre con trasformazioni del gruppo passare ad ogni altro.* Giacchè se P è il punto iniziale al quale applichiamo tutte le trasformazioni del gruppo, e se Q, R sono i due punti in cui P si trasforma colle trasformazioni rispett. τ, σ, è evidente che colla inversa τ^{-1} di τ si passa da Q a P, quindi col prodotto di σ per τ^{-1}, cioè $\sigma\tau^{-1}$ * si passerà da Q ad R.

---

* Ricordiamo la convenzione da noi già adottata (v. p. 4) di intendere che la prima trasformazione da operare sia sempre quella che scriviamo più *a destra.*

Fra le trasformazioni del gruppo ve ne sieno in generale ∞^h che lascino invariato un determinato punto P; esse formano naturalmente un sottogruppo del dato; moltiplicando allora un' unica trasformazione τ che muti P in Q per ciascuna di queste, si hanno tutte trasformazioni che mutano P in Q; d'altra parte se τ_1 è un' altra trasformazione che muta P in Q, il prodotto $\tau^{-1}\tau_1$ lascierà invariato P e quindi deve essere una delle ∞^h supposte di sopra; perciò τ_1 deve essere il prodotto di τ per una delle ∞^h. Infine due delle trasformazioni così ottenute che mutano P in Q, sono sempre diverse fra di loro, perchè facilmente, supposta la loro eguaglianza, se ne dedurrebbe quella di due che lasciano invariato P. *Esistono perciò anche ∞^h trasformazioni le quali mutano P in Q e non più di ∞^h, supposto che ne esista una τ; tutte tali trasformazioni hanno la forma $\tau\sigma$, essendo σ una qualunque delle ∞^h che lasciano inalterata P.*

Considerando ora la trasformazione $\tau\sigma\tau^{-1}$; questa lascierà inalterato Q, e di esse, variando σ, ve ne sarà ∞^h, tutte diverse; giacchè, come è facile dimostrare, dall'eguaglianza di due di esse, si dedurrebbe quella delle due σ corrispondenti. Inoltre ogni altra trasformazione ϑ che lasci inalterata Q, è di questa forma, perchè il prodotto $\tau^{-1}\vartheta\tau$ lascia inalterato P e quindi è una σ.

Dunque *se il dato gruppo ad r parametri contiene ∞^h trasformazioni che lasciano invariato P, conterrà ∞^h trasformazioni che lasciano invariato ciascuno dei punti Q in cui si trasforma P,* cioè: *tutti i punti della varietà invariante generata da*

P, nel modo indicato in principio, ammettono tante trasformazioni in se stesse per quante ne ha P.

Si può inoltre notare:

Se si indicano con σ le trasformazioni che lasciano inalterato P, quelle che lasciano inalterato Q saranno della forma $\tau\sigma\tau^{-1}$, essendo τ una di quelle che muta P in Q; od, in altri termini, adoperando una denominazione che introdurremo più tardi (v. Cap. II, § 8), possiamo dire che *il sottogruppo delle trasformazioni che lasciano invariato Q è il trasformato del gruppo di quelle che lasciano invariato P.*

Considerando allora tutti i punti come P che ammettono precisamente ∞^h trasformazioni in se stessi, si vede che essi per le trasformazioni del gruppo non possono che al più permutarsi gli uni negli altri, quindi possiamo dire:

L'assieme di tutti i punti che hanno ∞^h trasformazioni in se stessi, è invariante rispetto al gruppo.

Possiamo far vedere *che un punto che ammette ∞^h trasformazioni in se stesso, deve ammettere esattamente h trasformazioni infinitesimali indipendenti del gruppo*, cioè che devono esistere h simboli X, combinazioni lineari indipendenti, a coefficienti costanti, degli r che generano il gruppo, tali che i loro coefficienti ξ sieno identicamente zero per le coordinate del punto che si considera; o in altri termini (v. Cap. I, § 8), devono esistere h trasformazioni infinitesime indipendenti le quali per quel punto sono *di ordine superiore a zero*, cioè che lasciano *stabile* quel punto.

In effetti scriviamo le trasformazioni del gruppo canonico sotto la solita forma:

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_i + \ldots; \qquad (1)$$

se esiste una trasformazione (che non sia l'identica, cui corrisponderebbe il valore $t=0$) che rende $x'_i = x_i$, e a cui corrispondano i valori $\lambda'_1, \ldots \lambda'_r$, t', dei parametri, bisogna che sieno identicamente zero, per le coordinate di tal punto le espressioni:

$$(\lambda'_1 X_1 + \ldots + \lambda'_r X_r) x_i, \qquad (2)$$

cioè, chiamando al solito $\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn}$, i coefficienti di X_j, devono aversi le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'_1 \xi_{11} + \ldots + \lambda'_r \xi_{r1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_1 \xi_{1n} + \ldots + \lambda'_r \xi_{rn} = 0; \end{array}\right\} \qquad (3)$$

e fissati poi i valori λ', se facciamo mutare t in infiniti modi, otteniamo evidentemente, soddisfatte che sieno le (3), infinite trasformazioni che, come quella supposta, lasciano anche inalterato il punto.

Supposto dunque che vi sieno ∞^h trasformazioni che lasciano inalterato il punto, ne viene che vi saranno h sistemi indipendenti di valori delle λ, per i quali sono soddisfatte le equazioni (3), e non più di h; perciò la caratteristica della matrice delle ξ, prese queste per il punto considerato, sarà esattamente $r-h$, e quindi vi sa-

ranno h trasformazioni infinitesimali indipendenti (2) ammesse dal punto e non più di h.

Essendo poi chiaro dalle stesse formole precedenti che ogni punto che ammette h trasformazioni infinitesimali indipendenti, ammette ∞^h trasformazioni in sè, ne viene che:

La totalità dei punti che ammettono h e non più di h trasformazioni infinitesimali indipendenti fra quelle che generano il gruppo, forma una varietà invariante.

Da ciò possiamo dedurre come corollario il teorema che abbiamo dimostrato analiticamente alla fine del § 4, cioè *che eguagliando a zero tutti i determinanti di un certo ordine della matrice delle* ξ, *si hanno sistemi di equazioni invarianti rispetto al gruppo.*

Giacchè se noi eguagliamo a zero tutti i determinanti di ordine $r-h+1$ della matrice delle ξ (h essendo un numero qualunque minore o eguale ad r), e supponiamo al solito che tali equazioni sieno compatibili, otteniamo una varietà, i cui punti ammettono *almeno* h trasformazioni infinitesimali indipendenti; propriamente potendo in generale immaginarsi che alcuni di essi annullino solo i determinanti di ordine $r-h+1$ e non quelli di ordine $r-h$, altri annullino anche tutti quelli di ordine $r-h$, altri anche tutti quelli di ordine $r-h-1$, ecc., ne viene che la totalità di tutti siffatti punti, si divide in varie parti, di cui i punti della prima ammettono esattamente h trasformazioni infinitesime, i punti della seconda ne ammettono esattamente $h+1$, ecc. In forza dell'ultimo teorema ciascuna di queste parti co-

stituisce da sè una varietà invariante e quindi sarà invariante anche il loro assieme.

Dalle considerazioni fatte in questo §, con l'introduzione del concetto di *ordine* di una trasformazione infinitesimale (v. Cap. I, § 8), possiamo dire che:

Se per un punto x^0 la matrice delle ξ acquista la caratteristica $r-h$, esisteranno esattamente h trasformazioni infinitesimali indipendenti appartenenti al gruppo, le quali sono, per il punto x^0, di ordine maggiore di zero, che cioè lasciano stabile il punto, non coordinando ad esso alcuna direzione. Ma le trasformazioni infinitesimali indipendenti del gruppo sono r, dunque *devono esistere $r-h$ altre trasformazioni infinitesime indipendenti le quali per quel punto sono di ordine zero, cioè per le quali a quel punto sono coordinate esattamente $r-h$ direzioni indipendenti.*

Supponiamo ora che la matrice delle ξ abbia caratteristica $r-h$, ma non, come sopra, per un particolare punto x^0, sibbene per un punto x qualunque, il che viene a dire che le $X_1 \ldots X_r$ non sono assolutamente indipendenti, sibbene $r-h$ di esse lo sono, e le altre h si esprimono linearmente, con coefficienti funzioni delle x, mediante le prime. Per fissare le idee supponiamo che:

$$X_1, X_2 \ldots X_{r-h},$$

sieno *assolutamente* indipendenti (v. Cap. I, § 8), e che le rimanenti sieno esprimibili con le for-

mole:

$$X_{r-h+s} = \chi_{s1}(x) X_1 + \ldots + \chi_{s,r-h}(x) X_{r-h}, \quad (4)$$

dove le χ sieno delle funzioni delle x.

Consideriamo poi un punto x^0 per il quale la matrice dei coefficienti delle prime $r-h$ X (cioè solo di quelle che sono assolutamente indipendenti) *non* si annulli; un siffatto punto lo chiameremo, per brevità, *un punto di posto generale.*

Per questo punto la matrice *completa* delle ξ avrà esattamente per caratteristica $r-h$; perciò è applicabile il precedente teorema, e possiamo dire:

Se delle r trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri ve ne sono $r-h$, e non più, assolutamente indipendenti, ve ne saranno altrettante le quali per un punto di posto generale sono di ordine zero, ed h le quali sono di ordine maggiore di zero.

Si può anche facilmente far vedere quali sono le une e le altre; giacchè è evidente che per $x = x^0$, non può annullarsi nessuna delle $X_1 \ldots X_{r-h}$ e neanche una loro combinazione a coefficienti costanti; altrimenti si annullerebbe, per $x = x^0$, la matrice dei coefficienti delle prime $r-h$ X, il che è contro l'ipotesi che x^0 sia un punto di posto generale; quindi *le $r-h$ trasformazioni di ordine zero sono precisamente le $X_1 \ldots X_{r-h}$.*

D'altra parte se noi formiamo le h combinazioni *a coefficienti costanti*:

$$X_{r-h+s} - \chi_{s1}(x^0) X_1 - \ldots - \chi_{s\,r-h}(x^0) X_{r-h}, \quad (5)$$

ottenute in modo evidente dalle formole (4) col sostituire x^0 ad x *solo* negli argomenti delle χ, si hanno trasformazioni infinitesimali appartenenti al gruppo, fra loro indipendenti (perchè una relazione lineare a coefficienti costanti fra esse, ne porterebbe per necessità una fra tutte le $X_1 \dots X_r$ del gruppo dato, il che è contro l'ipotesi), e le quali per $x = x^0$ si annullano identicamente in forza delle relazioni (4), e sono perciò di ordine superiore a zero. *Restano così costruite le h trasformazioni infinitesimali di ordine maggiore di zero, di cui si parla nel teorema precedente. Ogni trasformazione infinitesimale del gruppo e di ordine maggiore di zero, per $x = x^0$ è una combinazione a coefficienti costanti delle* (5).

Le trasformazioni infinitesimali (5) lasciano *stabile* il punto x^0, secondo la denominazione introdotta nel Cap. I, § 8; e si potrebbero chiamare *le trasformazioni infinitesimali di stabilità del gruppo dato relativo al punto x^0.*

È evidente che esse sono atte a generare un gruppo ad h parametri, giacchè formando con due di esse una parentesi si deve avere una trasformazione infinitesimale di ordine maggiore di zero (v. nel Cap. I, § 8, il teorema relativo all'ordine di una parentesi in rapporto agli ordini delle componenti), e d'altra parte, poichè tutte le $X_1 \dots X_r$ formano già un gruppo, la medesima parentesi deve esprimersi linearmente mediante esse (v. il secondo teorema di Lie, Cap. I, § 13); deve perciò esprimersi mediante quelle fra le $X_1 \dots X_r$ che sono di ordine maggiore di zero, cioè appunto mediante le (5). *Il gruppo formato da queste è*

un sottogruppo ad h parametri del dato; esso è precisamente quello di cui abbiamo trattato di sopra, costituito da tutte le ∞^h trasformazioni che lasciano invariato il punto $P \equiv (x^0)$; lo possiamo chiamare il *sottogruppo di stabilità del punto* x^0. Possiamo allora enunciare il teorema:

Se le r trasformazioni infinitesimali del gruppo dato sono assolutamente indipendenti (cioè se $h = 0$), *il sottogruppo di stabilità di un punto di posto generale si riduce alla trasformazione identica.* Inoltre: *Il sottogruppo di stabilità di un punto, è il trasformato di quello di un altro* (v. sopra).

§ 6. Invariantività di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, lineari, di 1.° ordine, omogenee, rispetto ad un gruppo.

Si abbia un sistema completo, di quelli considerati nel § 10 del Cap. I, e indichiamolo con:

$$Y_1 F = 0 \; \ldots\ldots \; Y_q F = 0, \qquad (1)$$

e un altro sistema analogo scritto nelle variabili x':

$$Y_1' F = 0 \; \ldots\ldots \; Y'_q F = 0. \qquad (2)$$

Si sa (v. Cap. I, § 10) che il sistema resta completo se alle sue equazioni sostituisco delle combinazioni lineari indipendenti delle medesime, ed è chiaro che così facendo gli integrali comuni del sistema restano inalterati.

Supponiamo operata una trasformazione delle variabili x nelle x', per modo che il sistema (1) resti trasformato in uno espresso nelle variabili x', e supponiamo che ciascuna delle equazioni così ottenute da (1) sia una combinazione lineare delle equazioni (2), per modo che in tal maniera le (1) corrispondano a q combinazioni lineari indipendenti delle (2). Quando ciò si verifica diremo che i due sistemi (1) e (2) sono *equivalenti* ed allora chiaramente ogni integrale di (1), trasformato nelle x', diventa un integrale di (2) e viceversa, per modo che potrebbe assumersi questa ultima proprietà come definizione dell'equivalenza. Se ciascuna delle equazioni del sistema (2) non è altro che una combinazione lineare di quelle del sistema (1) quando in questo vi si scambii solamente x in x', allora mediante la data trasformazione il sistema (1) appare equivalente a sè stesso, cioè, come si dice, *il sistema* (1) *è invariante rispetto alla data trasformazione.*

Noi vogliamo ricercare quali sono le condizioni perchè un dato sistema, come (1), sia invariante rispetto ad una trasformazione, ovvero rispetto a tutte le trasformazioni di un gruppo ad un parametro.

Assegnata una trasformazione:

$$x'_i = f_i\,(x), \qquad (3)$$

se, mediante questa, il sistema (1) deve trasformarsi in sè stesso, ogni integrale comune di (1) dovrà trasformarsi in un integrale di (1) stesso; viceversa se ogni integrale di (1) si trasforma mediante (3) in un integrale del sistema (1) stesso

(scritto naturalmente nelle variabili x'), allora, poichè il sistema trasformato di (1) ha naturalmente anch'esso per integrali le trasformate degli integrali di (1), ne viene che il sistema trasformato di (1) è equivalente al medesimo sistema (1) scritto nelle variabili x', cioè è equivalente a sè stesso.

Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (1) *sia invariante rispetto alla trasformazione* (3), *è che, supposto che* $\varphi(x)$ *sia un suo integrale, lo sia anche* $\varphi(f(x))$. *

Si abbia ora un gruppo ad un parametro generato da una trasformazione infinitesimale X, e si voglia ricercare la condizione necessaria e sufficiente perchè (1) sia invariante rispetto a tutte le trasformazioni di questo gruppo.

Avendosi, per tali trasformazioni nell'intorno della trasformazione identica, le formole:

$$\varphi(x') = \varphi(x) + \frac{t}{1} X\varphi(x) + \dots \qquad (4)$$

dove $\varphi(x)$ rappresenta una funzione arbitraria, che, nel nostro caso, porremo eguale ad un inte-

---

* A spiegare chiaramente ciò, acciocchè un principiante non incorra in qualche facile confusione, osserviamo quanto segue: se scriviamo il sistema (1) nelle x', un suo integrale sarà $\varphi(x')$; operiamo su questo la trasformazione (3), e si ha $\varphi(f(x))$ il quale, per quanto si è detto, deve essere integrale del sistema (1) scritto nelle x. Ed è ciò appunto che afferma il teorema.

grale di (1), e tenendo conto del teorema precedente, si ha che, per la invariantività del sistema (1), $\varphi(x')$, espresso nelle x, cioè l'espressione data dal secondo membro di (4), deve essere integrale di (1), ma lo è già $\varphi(x)$, dunque lo sarà:

$$\varphi(x') - \varphi(x),$$

e quindi anche $\dfrac{\varphi(x') - \varphi(x)}{t}$, cioè:

$$X\varphi(x) + \frac{t}{2!}X^2\varphi(x) + \ldots\ldots$$

per qualunque t, e quindi anche per $t = 0$; deduciamo dunque che $X\varphi(x)$ deve essere integrale di (1). D'altra parte se $X\varphi(x)$ è integrale di (1), chiamando $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q}$, tutti gli $n - q$ integrali indipendenti di (1), per un teorema noto (vedi Cap. I, § 10) $X\varphi(x)$ deve essere funzione di:

$$\varphi_1 \ldots \varphi_{n-q},$$

cioè eguale a $\psi(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-q})$. Ma allora formando $X^2\varphi(x)$, cioè $X\psi$, che è eguale a:

$$X\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} X\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{n-q}} X\varphi_{n-q},$$

e osservando che ciascuno dei termini del secondo membro è, in forza delle nostre ipotesi, una funzione delle φ, si ha che $X^2\varphi(x)$ è una funzione delle φ, e quindi è integrale del sistema (1); similmente sono integrali $X^3\varphi(x)$, ecc., cioè ogni termine del secondo membro di (4), e quindi tutto tal secondo membro, cioè $\varphi(x')$. Resta così provato che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (1) *sia invariante per tutte le trasformazioni del gruppo generato da* X, *è che operando la* X *su ciascun integrale di* (1) *si abbia ancora un integrale di* (1).

Questa condizione la si può ridurre ad una forma che non presupponga la preventiva conoscenza degli integrali di (1).

Essendo $X\varphi$ un integrale di (1), si ha:

$$Y_k X \varphi = 0,$$

ma da $Y_k \varphi = 0$ si ha:

$$X Y_k \varphi = 0,$$

dunque:

$$(Y_k X) \varphi = 0,$$

Se dunque consideriamo il sistema di equazioni a derivate parziali, lineari, omogenee, di primo ordine:

$$(Y_k X) F = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots q) \qquad (5)$$

questo sistema ammette i medesimi integrali del sistema dato, e quindi le sue equazioni devono, in forza di quanto si è detto di sopra, essere combinazioni lineari di quelle del sistema (1).

D'altra parte, se ciò si verifica, ogni integrale φ di (1) è anche integrale di (4), ed essendo allora $X Y_k \varphi = 0$, sarà anche $Y_k X \varphi = 0$, cioè $X\varphi$ è integrale di (1) e quindi, per il precedente teorema, il sistema (1) è invariante rispetto alle trasformazioni del gruppo X. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente per l'invariantività del sistema (1) rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo generato da X, è che le espressioni $(Y_k X)$ si esprimano linearmente mediante le Y stesse.

Si può far vedere che *se un sistema* (1) *è invariante rispetto al gruppo X_1, ed anche rispetto ad un altro gruppo X_2, esso sarà invariante anche rispetto al gruppo $(X_1 X_2)$.*

Giacchè: per l'identità di Jacobi (v. Cap. I, § 8) si ha:

$$((Y_k X_1) X_2) + ((X_1 X_2) Y_k) + ((X_2 Y_k) X_1) = 0; \quad (6)$$

ora:

$$(Y_k X_1) = \sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} Y_s,$$

e quindi:

$$((Y_k X_1) X_2) = \left(\sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} Y_s, X_2\right) = \sum_{s=1}^{q} (\lambda_{ks} Y_s, X_2) =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} (Y_s X_2) - \sum_{s=1}^{q} X_2 \lambda_{ks} . Y_s .$$

Ma per ipotesi ciascuno dei termini del primo sommatorio dell' ultimo membro si riduce ad una funzione lineare delle Y, dunque tutto il secondo membro sarà una siffatta funzione lineare. Operando ora similmente sull'ultimo termine della formola (6), e riducendolo quindi anch'esso ad una funzione lineare delle Y, si vede infine che il termine:

$$((X_1 X_2) Y_k)$$

è, in forza delle nostre ipotesi, una funzione lineare delle Y, e perciò il sistema (1) *è invariante rispetto al gruppo* $(X_1 X_2)$.

Facciamo infine vedere che *se un sistema* (1) *è invariante rispetto ai gruppi generati rispettivamente da* $X_1, X_2, \ldots X_r$, *esso sarà invariante anche rispetto al gruppo generato da:*

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_r X_r,$$

dove le c sono costanti.

Giacchè calcolando le parentesi:

$$(Y_k, c_1 X_1 + \ldots + c_r X_r) = \\ = c_1 (Y_k X_1) + \ldots + c_r (Y_k X_r),$$

ed osservando che per le nostre ipotesi, il secondo membro riesce tutto una funzione lineare delle Y, resta dimostrato l'assunto.

Notiamo infine che formando le Y un sistema completo, ed essendo quindi le combinazioni:

$$(Y_k Y_j)$$

sempre combinazioni lineari delle Y stesse, ne viene *che il sistema* (1) *è sempre invariante rispetto a tutti i gruppi generati da ciascuna delle Y stesse, od anche da una combinazione lineare a coefficienti costanti delle medesime.*

§ 7. Invariantività rispetto ad un gruppo, di un sistema di trasformazioni infinitesime. Il sistema delle trasformazioni infinitesime che appartengono ad un gruppo ad r parametri, è invariante rispetto al gruppo stesso.

Si abbia un sistema di q trasformazioni infinitesimali:

$$Y_1, \ Y_2, \ldots Y_q, \tag{1}$$

di cui i coefficienti li chiameremo rispettivamente:

$$\begin{matrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \ldots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{q1} & \eta_{q2} & \ldots & \eta_{qn}. \end{matrix}$$

Operando una trasformazione delle variabili x in altre variabili x', le Y acquistano un'altra forma.

Se ciascuna delle Y trasformate non è altro che una combinazione lineare omogenea *a coefficienti costanti* delle antiche Y scritte nelle variabili x', allora noi diremo che il sistema (1) *è invariante* rispetto alla data trasformazione. Se ciò si verifica, si avrà anche che una combinazione lineare a coefficienti costanti delle (1), operandovi la data trasformazione, si riduce ad una combinazione lineare a coefficienti costanti delle (1) stesse, quando in queste si fa il mutamento formale delle x nelle

x', cioè si avrà una relazione del tipo:

$$\sum_{s=1}^{q} c_s Y_s = \sum_{s=1}^{q} c'_s Y'_s , \qquad (2)$$

indicando con Y' le Y scritte nelle variabili x' anzichè nelle x; queste relazioni dovranno sussistere identicamente, in forza della trasformazione assegnata, e, date arbitrariamente le c, le c' devono essere funzioni solamente di esse e dei coefficienti della trasformazione, cioè devono variare solo col variare delle c, purchè resti fissa la trasformazione.

Possiamo far vedere che *le c' devono propriamente essere funzioni lineari a coefficienti costanti delle c.* Giacchè per la nostra ipotesi, ogni Y_s si esprime con una combinazione lineare a coefficienti costanti delle Y', cioè:

$$Y_s = \sum_{j=1}^{q} \rho_{js} Y'_j ,$$

dove le ρ sono costanti, cioè indipendenti dalle x e x'; quindi moltiplicando per c_s e sommando rispetto ad s e paragonando con (2), si ha infine:

$$c'_j = \sum_{s=1}^{q} \rho_{js} c_s . \qquad (3)$$

Si può inoltre osservare che si potranno sempre scegliere, almeno in un modo, i coefficienti c, tali che la trasformazione infinitesimale:

$$\sum_{s=1}^{q} c_s Y_s ,$$

resti da sè invariata colla trasformazione, cioè in modo che i coefficienti c' risultino tutti proporzionali alle c; basterà porre nelle (3) ogni c'_s eguale ad un fattore ρ moltiplicato per c_s, e ricavare quindi dal sistema di equazioni lineari nelle c, così ottenute, il sistema di valori delle c.

Immaginiamo ora tutte le trasformazioni di un gruppo ad un parametro generato da una trasformazione infinitesimale X, di cui i coefficienti sieno $\xi_1 \dots \xi_n$ e vogliamo esaminare quando è che si verifica la relazione (2), in forza di tutte le trasformazioni del gruppo; naturalmente le c' potranno variare in generale passando da una trasformazione ad un'altra, perchè noi abbiamo già detto che esse in generale dipenderanno, oltre che dalle c, dai parametri della trasformazione.

Dimostriamo prima di tutto la seguente formola:

$$Y'_j = Y_j + \frac{t}{1}(X\,Y_j) + \dots \qquad (4)$$

la quale è sussistente quando le x e le x' sono legate dalle solite relazioni:

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1} X x_i + \dots$$

In effetti:

$$Y'_j = \sum_{s=1}^{n} Y'_j\, x_s \,.\, \frac{\partial}{\partial x_s}\,.$$

Ma:

$$x_s = x'_s - \frac{t}{1} X' x'_s + \ldots = x'_s - \frac{t}{1} \xi'_s + \ldots$$

se con X' e ξ' si rappresentano le stesse X e ξ espresse nelle x'; di qui si ha:

$$Y'_j x_s = Y'_j x'_s - \frac{t}{1} Y'_j \xi_s + \ldots =$$

$$= \eta'_{js} - \frac{t}{1} Y'_j \xi'_s + \ldots,$$

indicando anche qui con η' i coefficienti η scritti nelle x'.

Sviluppando ora colla solita formola le quantità η'_{js} e $Y'_j \xi'_s$, cioè ponendo:

$$\eta'_{js} = \eta_{js} + \frac{t}{1} X \eta_{js} + \ldots$$

$$Y'_j \xi'_s = Y_j \xi_s + \frac{t}{1} X Y_j \xi_s + \ldots$$

e sostituendo, e raccogliendo i termini contenenti la prima potenza di t, si ha infine la formola (4).

Se dunque per qualunque valore di t, la Y'_j deve esprimersi linearmente e con coefficienti costanti mediante le Y, bisogna, per effetto della formola (4), che la parentesi:

$$(X Y_j)$$

sia una combinazione lineare a coefficienti costanti delle Y stesse, cioè eguale a:

$$\sum_{\nu=1}^{q} g_{j\nu} Y_\nu .$$

D'altra parte questa condizione è anche sufficiente; possiamo cioè dimostrare che, verificandosi la anzidetta condizione, si possono determinare tali ρ dipendenti da t, ma non dalle x, che la espressione:

$$\sum_{j=1}^{q} \rho_{js} \, Y'_j \, , \tag{5}$$

risulti indipendente da t, quando in essa in luogo delle x' si pongano le loro espressioni in funzione di x e di t ed inoltre che per $t=0$ tutte le ρ si riducano a zero, meno la ρ_{ss} che si riduca ad 1. Se ciò dimostriamo, abbiamo evidentemente dimostrato il nostro assunto, perchè allora la (5) deve essere eguale a ciò che da essa si ottiene ponendo anche $t=0$; ma per $t=0$ la (5) si ridurrà identicamente a Y_s e quindi si avrà allora la formola:

$$Y_s = \sum_{j=1}^{q} \rho_{js} \, Y'_j \, . \tag{6}$$

La derivata di (5) rispetto a t è:

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{d \, \rho_{js}}{d \, t} \, Y'_j + \sum_{j=1}^{q} \rho_{js} \frac{d \, Y'_j}{d \, t} \, ; \tag{7}$$

in questa espressione la $\dfrac{d \, Y'_j}{d \, t}$ appare a tutta prima, e scritta così, un'espressione simbolica vuota di significato, perchè Y' è un simbolo; è però evidente che con essa si intende quanto segue: prima di tutto si intende che nelle Y' si sieno introdotte le variabili x, la t e le derivate ri-

spetto alle x, e che i loro coefficienti si sieno così ridotti funzioni di x e di t, indi che esse si intendano operate su di una funzione di x, e infine che in luogo dei loro coefficienti si sostituiscano le derivate dei medesimi rispetto a t.

Dalla (4) ricaveremo ora la desiderata derivata di Y'_j rispetto a t, sotto forma di una serie; consideriamo per un momento la trasformazione che ha per parametro $t + t_1$, e chiamiamo x'' le variabili in cui si mutano allora le x, e Y'' le Y scritte nelle x''; otteniamo dalla (4) la formola:

$$Y''_j = Y_j + \frac{t + t_1}{1}(X\,Y_j) + \dots \qquad (8)$$

Se nel secondo membro di questa formola ricerchiamo il coefficiente della prima potenza di t_1, otteniamo esattamente la derivata rispetto a t ricavata dal secondo membro della formola (4), quindi se noi possiamo ordinare il secondo membro di (8) secondo le potenze ascendenti di t_1, abbiamo risoluto la nostra questione. Ma sappiamo che la trasformazione col parametro $t + t_1$ corrisponde al prodotto delle due, una col parametro t, l'altra col parametro t_1, e che quella col parametro t_1 è precisamente quella che fa passare dalle x' alle x'', dunque noi possiamo scrivere, (sempre in forza della formola (4)):

$$Y''_j = Y'_j + \frac{t_1}{1}(X'\;Y'_j) + \dots;$$

abbiamo così ottenuto lo sviluppo di Y''_j secondo

le potenze di t_1, e quindi possiamo affermare che la richiesta derivata non è altro che:

$$\frac{d\,Y'_j}{d\,t} = (X'\,Y'_j), \tag{9}$$

ed, in forza della nostra ipotesi, il secondo membro di (9) sarà una combinazione lineare a coefficienti costanti delle Y', cioè si avrà:

$$\frac{d\,Y'_j}{d\,t} = \sum_{\nu=1}^{q} g_{j\nu}\,Y'_\nu\,. \tag{10}$$

Sostituendo questa espressione in (7) e raccogliendo opportunamente, si ha infine che la derivata di (5) rispetto a t assume la forma:

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(\frac{d\,\rho_{\nu s}}{d\,t} + \sum_{j=1}^{q} g_{j\nu}\,\rho_{js}\right) Y'_\nu\,, \tag{11}$$

che sarà zero quando saranno soddisfatte tutte le condizioni:

$$\frac{d\,\rho_{\nu s}}{d\,t} + \sum_{j=1}^{q} g_{j\nu}\,\rho_{js} = 0. \tag{12}$$

Queste formano un sistema di q equazioni differenziali cui devono soddisfare le q funzioni di t: $\rho_{1s} \ldots \rho_{qs}$; noi le possiamo sempre risolvere con la condizione che per $t = 0$ si riducano tutte a zero, meno la ρ_{ss} che si riduca invece ad 1.

È perciò dimostrato il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di trasformazioni infinitesimali $Y_1 \ldots Y_q$, sia invariante rispetto al gruppo ad un para-

metro generato dalla trasformazione infinitesimale X, è che le parentesi $(X\,Y_j)$ sieno esprimibili linearmente, a coefficienti costanti, mediante le Y stesse.

Da questo teorema risultano alcuni corollari facili a dimostrarsi.

Se un sistema $Y_1 \ldots Y_q$ è invariante per i gruppi definiti da $X_1, X_2, \ldots$, sarà invariante per tutti i gruppi definiti da una qualunque combinazione lineare a coefficienti costanti delle X stesse.

Se un sistema $Y_1 \ldots Y_q$ è invariante per i gruppi generati da X_1, X_2, lo sarà anche pel gruppo generato da $(X_1\,X_2)$.

Le dimostrazioni di questi teoremi sono le stesse di quelle fatte altre volte in occasioni simili e perciò le tralasciamo; il secondo di essi si dimostra mediante la solita identità di Jacobi.

Vogliamo aggiungere una osservazione a proposito della formola (4), della quale noi non abbiamo calcolati i termini successivi. Dalle dimostrazioni fatte risulta immediatamente una proprietà di tali termini, e cioè che *se $(X\,Y_j)$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle Y stesse, lo stesso deve verificarsi per i suddetti termini*, e ciò chiaramente, perchè allora, in forza del teorema dimostrato, la Y'_j deve riuscire, per qualunque t, una combinazione lineare, a coefficienti costanti, delle Y. Si può inoltre far vedere che se $(X\,Y)$ è zero, anche i suddetti termini sono zero. Ma di ciò tratteremo nel § seguente.

Supponiamo ora che le Y sieno le stesse X; cioè che si abbia un sistema di trasformazioni infinitesimali $X_1 \dots X_r$, che debba essere invariante per tutte le trasformazioni del gruppo generato da una qualunque combinazione lineare a coefficienti costanti delle X stesse, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r$. Applicando allora i teoremi precedenti troviamo immediatamente che *condizione necessaria e sufficiente per ciò è che le parentesi* $(X_j X_i)$ *si esprimano linearmente a coefficienti costanti mediante le* X.

Ora, come sappiamo, questa è appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè le r trasformazioni infinitesimali sieno atte a generare un gruppo ad r parametri essenziali (v. Cap. I, § 14); quindi ne deduciamo, prima di tutto, un'altra forma del secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi, e poi, che *le trasformazioni infinitesimali appartenenti ad un gruppo ad r parametri, hanno la proprietà fondamentale di formare un sistema invariante rispetto a qualunque trasformazione del gruppo stesso.*

Potrebbe ora chiedersi: quando è che ciascuna delle trasformazioni infinitesimali del gruppo, è, da sè sola, invariante rispetto al gruppo? A ciò risponderemo nel § seguente.

§ 8. Invariantività di una trasformazione o di un gruppo rispetto ad una trasformazione o ad un gruppo, ovvero permutabilità di due trasformazioni, o di due gruppi. Trasformazioni infinitesimali e sottogruppi eccezionali o invarianti di un dato.

Si abbiano due trasformazioni S, T e supponiamo che S sia data delle formole:

$$x'_i = f_i(x), \tag{1}$$

e che T sia data da:

$$y'_i = \varphi_i(y), \tag{2}$$

donde:

$$y_i = \psi_i(y').$$

Queste ultime formole scriviamole in due maniere diverse adoperando due diversi sistemi variabili, e cioè:

$$x_i = \psi_i(z), \tag{3}$$

e:

$$z'_i = \varphi_i(x'); \tag{4}$$

indi nelle formole di S, in luogo delle x e delle x' sostituiamo i loro valori ricavati rispettivamente da (3) e (4). Si ha la trasformazione:

$$z'_i = \varphi_i[f(\psi(z)]. \tag{5}$$

Questa nuova traformazione la chiamiamo *trasformata di* (1) *mediante* (2), e diremo che la (1) è *invariante* rispetto a (2), quando le (5) esprimono fra z' e z le stesse relazioni che le (1) fra x' e x. È facile riconoscere che la (5) risulta formata, come prodotto delle date, nel seguente modo:

$$T\,S\,T^{-1}, \tag{6}$$

intendendo, al solito, che si operi prima la trasforzione scritta più a destra (v. pag. 4). La dimostrazione di ciò è semplicissima: basta esaminare le varie eliminazioni che abbiamo dovuto fare mediante (1), (3), (4) per giungere a (5); eliminando le x_i fra (1) e (3), la trasformazione fra x' e z che si ottiene è eguale evidentemente al prodotto $S\,T^{-1}$; ed eliminando poi x' fra questa così ottenuta e la (4) si ha il prodotto (6).

Sia ora la (6) eguale a S:

$$T\,S\,T^{-1} = S,$$

donde si ha:

$$T\,S = S\,T, \tag{7}$$

o ancora:

$$T = S\,T\,S^{-1}; \tag{8}$$

queste formole ci mostrano subito che:

1.° *Quando una trasformazione è invariante rispetto ad un'altra, il prodotto delle due è indipendente dall'ordine dei fattori, e reciprocamente, cioè allora le due trasformazioni sono, come si dice, permutabili.*

2.° *Quando una trasformazione è invariante rispetto ad un'altra, anche la seconda è reciprocamente invariante rispetto alla prima.*

Sia G un gruppo, e T una trasformazione qualunque. Trasformare il gruppo G mediante T, significa formare l'assieme di tutte le trasformate mediante T delle singole trasformazioni di G. Ora è facile vedere che:

Trasformando il gruppo G mediante T, si ha ancora un gruppo. In effetti, se S, S_1, sono due trasformazioni di G, le loro trasformate sono rispettivamente:

$$T S T^{-1}, \qquad T S_1 T^{-1},$$

il cui prodotto è:

$$T S T^{-1} T S_1 T^{-1} = T S S_1 T^{-1} = T (S S_1) T^{-1},$$

cioè è precisamente la trasformata del prodotto delle due date, e quindi essendo tal prodotto compreso in G, tale trasformata sarà compresa fra quelle ottenute dianzi.

Il gruppo così ottenuto, trasformando G, sarà evidentemente il medesimo G, se T appartiene a G, e sarà in generale un gruppo diverso nel caso contrario, pur non escludendo però che anche quando T non appartiene a G il gruppo trasformato possa essere G stesso.

Se ora supponiamo che G sia un sottogruppo di un altro gruppo H, e che T appartenga ad H, con lo stesso ragionamento si prova *che il*

trasformato di G è un altro sottogruppo di H stesso.

Sieno date due trasformazioni infinitesime X, Y. Secondo i principî del § prec. si dirà che Y è *invariante* rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo generato da X, quando, scritta Y nelle variabili x', legate alle x dalle relazioni che corrispondono alle trasformazioni medesime, si abbia $Y' = \rho\, Y$ essendo ρ una quantità dipendente solo da t, (parametro della trasformazione e il cui valore è 1 per $t = 0$); ciò porta, come sappiamo, che:

$$(X\,Y) = c\,Y. \tag{9}$$

Un caso specialmente notevole si ha quando questa relazione fra le due trasformazioni X e Y è reciproca, cioè quando anche X è invariante per tutte le trasformazioni generate da Y. Possiamo far vedere che quando si ha tale reciprocità la quantità ρ è indipendente da t, e quindi ha per valore 1, e reciprocamente; infatti noi sappiamo che essa è determinata dall'equazione differenziale (v. § prec.):

$$\frac{d\rho}{dt} + c\rho = 0.$$

Ora se $\rho = 1$, questa equazione dà $c = 0$ e quindi la (9) si riduce a:

$$(X\,Y) = 0\,, \tag{10}$$

il che mostra appunto che la relazione fra X e Y è reciproca, potendo il secondo membro (10) intendersi indifferentemente come caso particolare di una funzione lineare di X, o caso particolare di una funzione lineare di Y. Se poi si ammette la (10), ne viene $c=0$ e quindi $\frac{d\rho}{dt}=0$, cioè ρ è indipendente da t, e quindi eguale ad 1, dovendo in ogni caso avere valore 1 per $t=0$. Quando è verificata la (10), noi diremo che le due trasformazioni infinitesimali X e Y sono fra loro *permutabili*; ricordando il significato della parentesi $(X\,Y)$, questa denominazione trova una maggior giustificazione nel fatto che allora $X\,Y = Y\,X$.

Come conclusione di ciò possiamo enunciare il teorema importante:

Condizione nesessaria e sufficiente perchè ogni trasformazione finita del gruppo X, lasci inalterata la trasformazione infinitesimale Y, cioè dia luogo alla semplice relazione $Y' = Y$, è che sia zero la parentesi $(X\,Y)$.

È utile osservare inoltre che *quando* $(X\,Y)=0$, avendosi:

$$Y' = Y,$$

nella formola (4) *del § prec., i coefficienti dei termini in $t^1, t^2, \ldots$, che noi non abbiamo calcolati, devono essere zero* e ciò perchè in tale ipotesi Y' deve essere eguale ad Y per qualunque valore di t.

Si può proporsi il seguente problema: date r trasformazioni infinitesimali $Y_1 \ldots Y_r$, atte a ge-

nerare un gruppo come si può determinare la più generale trasformazione la quale lasci inalterate ciascuna delle Y, cioè dia luogo alle identità:

$$Y'_1 = Y_1, \ldots\ldots Y'_r = Y_r.$$

È evidente che tutte siffatte trasformazioni formano un gruppo, e quindi il problema può anche enunciarsi dicendo:

Determinare il gruppo di tutte le trasformazioni fra le x' e x le quali rendono le Y' identicamente eguali alle Y.

Noi non vogliamo però entrare nella trattazione di questo problema, e per un caso particolare di esso rimandiamo al Cap. IV, § 6.

Consideriamo una trasformazione del gruppo generato da X, p. es.:

$$(T) \qquad x'_i = x_i + \frac{t}{1} X x_i + \ldots$$

e trasformiamola, nel modo sopradetto, mediante una trasformazione:

$$(T_1) \qquad y'_i = y_i + \frac{t_1}{1} Y y_i + \ldots$$

del gruppo generato da Y, supposto, per ora, nessun legame fra X e Y.

Per trovare la trasformata di T procediamo nel seguente modo:

Sia essa:

$$z'_i = z_i + \frac{\tau}{1} Z z_i + \ldots;$$

dobbiamo trovare il parametro τ e la trasformazione infinitesimale Z. Ora evidentemente Z non è altro che la X, quando in questa in luogo delle x si sostituiscono i loro valori in funzione di z, ricavati dalla trasformazione T_1, in cui le y' sieno le z, e le y sieno le x, cioè dalla trasformazione T_1 scritta sotto la forma:

$$z_i = x_i + \frac{t_1}{1} Y x_i + \ldots$$

Le x ricavate da queste formole sono, indicando per un momento con Y' la Y scritta nelle variabili z:

$$x_i = z_i - \frac{t_1}{1} Y' z_i + \ldots$$

Ora se in X per le x poniamo questi valori, in forza della formula (4) del § prec., otteniamo, indicando con X' la X scritta nelle z:

$$X = X' - \frac{t_1}{1}(Y' X') + \ldots =$$

$$= X' + \frac{t_1}{1}(X' Y') + \ldots;$$

il secondo membro di questa espressione è precisamente la Z richiesta, e perciò si ha:

$$z'_i = z_i + \frac{\tau}{1}\left(X' + \frac{t_1}{1}(X' Y') + \ldots\right) z_i + \ldots$$

Il parametro τ si calcola facilmente, osservando che per $t_1 = 0$, la T deve restare inalterata, e

quindi, salvo il nome delle variabili (il cui cangiamento porta anche quello della notazione X' invece di X), questa trasformazione deve coincidere con T, e perciò, paragonando, risulta $\tau = t$. La trasformazione trasformata, è dunque, se la scriviamo ancora nelle variabili x e x':

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1}\left[X + \frac{t_1}{1}(X\,Y)\ldots\right]x_i + \ldots \quad (11)$$

Se ora questa trasformata (11) deve essere eguale a T, qualunque sieno i parametri t e t_1, bisogna che $(X\,Y)$ sia eguale a zero, e d'altra parte, per l'osservazione fatta di sopra (v. pag. 202), sappiamo che se $(X\,Y)$ è zero, sono zero anche tutti i termini seguenti del coefficiente di t, cioè della trasformazione infinitesimale che compare nella (11), perchè tale trasformazione infinitesimale non è altro in sostanza che quella del secondo membro della formola (4) del § prec., e quindi se $(X\,Y)$ è zero, le (11) coincide con la T. Abbiamo dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le trasformazioni di due gruppi generati da X e Y, sieno fra loro permutabili, è che sia zero la parentesi $(X\,Y)$, cioè che sieno permutabili le due trasformazioni infinitesimali dei gruppi.

Quando ciò si verifica, i due gruppi si chiamano *permutabili.*

È utile ora mostrare con quanta facilità si possa ottenere questo stesso risultato, partendo dalla formola del prodotto di due trasformazioni finite, cioè dalla formola (7) del Cap. I, § 9.

Se la X_3 (v. loc. cit.) deve restare inalterata scambiandovi X_1 con X_2 e t con t', e ciò per *qualunque* sistema di valori di t, t', lo stesso deve avvenire per:

$$t\,t'\,[\gamma'\,(X_1\,X_2) + \gamma''\,t\,(X_1\,X_1\,X_2) + \ldots],$$

e quindi anche per:

$$\gamma'\,(X_1\,X_2) + \gamma''\,t\,(X_1\,X_1\,X_2) + \ldots$$

Ma scambiando X_1 con X_2 e t con t' si ha:

$$\gamma'\,(X_2\,X_1) + \gamma''\,t'\,(X_2\,X_2\,X_1) + \ldots$$

e dovendo questa coincidere colla precedente *per qualunque sistema di valori di* t e t', si ricava $(X_1\,X_2) = 0$.

D'altra parte se $(X_1\,X_2) = 0$, sono evidentemente zero anche tutte le altre parentesi che compaiono nella formola (7), e questa si riduce perciò a:

$$X_3 = t\,X_1 + t'\,X_2,$$

e resta perciò inalterata cogli scambi indicati; il teorema resta così dimostrato.

Da questo teorema risulta una importante applicazione al caso dei gruppi a più parametri. Se consideriamo le trasformazioni di un tal gruppo, p. es., quelle generate della trasformazione infinitesimale X_1, e tutte quelle generate da X_2, la ondizione perchè le prime sieno permutabili con

tutte le seconde è che $(X_1 X_2)$ sia zero; abbiamo perciò:

Condizione necessaria e sufficiente perchè sieno fra loro, a due a due, permutabili tutte le trasformazioni di un gruppo ad r parametri, è che sieno fra loro permutabili, a due a due, le r trasformazioni infinitesimali indipendenti del gruppo stesso.

Può avvenire che non tutte le trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri sieno, a due a due, permutabili, ma che ne esiste fra esse una la quale sia permutabile con tutte le altre; in tal caso una siffatta trasformazione infinitesimale si dirà una *trasformazione infinitesima eccezionale del gruppo*. È evidente allora il teorema:

Il gruppo generato da una trasformazione infinitesima eccezionale di un gruppo ad r parametri è un sottogruppo permutabile con tutte le trasformazioni del gruppo totale.

Ricordando quanto si è di sopra dimostrato che cioè quando $(X\,Y)$ è zero, allora la trasformata di Y mediante una qualunque trasformazione del gruppo X, è la Y stessa, e applicandolo al nostro caso, possiamo dire che *la trasformata di una trasformazione infinitesima eccezionale del gruppo, mediante una qualunque trasformazione finita del gruppo stesso, è sè stessa, cioè essa è da sola invariante rispetto al gruppo.*

Evidentemente quindi *se tutte le trasformazioni infinitesime sono eccezionali*, cioè *se si verifica il*

caso che tutte le parentesi $(X_i\, Y_j)$ *sono zero, allora, per le trasformazioni del gruppo, ciascuna di esse resta da sola inalterata.*

Si può osservare che *se* $r - 1$ *trasformazioni infinitesime indipendenti sono eccezionali, sarà eccezionale anche la* $r.^{ma}$, *indipendente dalle precedenti*, il che si riconosce facilmente.

Nei casi precedenti abbiamo l'esempio di sottogruppi del gruppo ad r parametri, i quali si trasformano in sè stessi per le trasformazioni del gruppo, ma in maniera che ogni loro trasformazione si trasformi *da sola* in sè stessa. Ora possiamo considerare un caso più generale e cioè quando il sottogruppo si trasforma in sè stesso, ma le sue trasformazioni si permutino fra loro. Quando ciò si verifica, il sottogruppo si chiama *eccezionale, o invariante rispetto al gruppo totale.*

Sieno al solito $X_1 \ldots X_r$ le trasformazioni infinitesime di un gruppo ad r parametri, e consideriamo il gruppo della sola X_1. Le trasformate delle trasformazioni di questo mediante una qualunque del gruppo totale, cui corrisponda p. es. la trasformazione infinitesima:

$$Y = \sum_{s=1}^{r} e_s\, X_s\,, \qquad (12)$$

è data dalla formola (11), in cui si ponga X_1 in luogo di X, donde si vede che perchè essa appartenga ancora al gruppo generato da X_1, bisogna che $(X_1\, Y)$ sia eguale ad una costante moltiplicata per X_1 stessa; e d'altra parte quando ciò

si verifica, per un teorema dimostrato nel § prec., si sa che nello stesso modo saranno anche esprimibili i vari coefficienti delle potenze di t_1 che compaiono nella formola (11), e quindi la (11) rappresenta allora effettivamente una trasformazione del gruppo X_1. Intanto se $(X_1 Y)$ deve essere eguale a $c X_1$, per qualunque Y data da (12), cioè variando le e_s in tutti i modi possibili, è necessario e basta che le parentesi formate con X_1 e con qualunque altra delle $X_2 \dots X_r$ sia il prodotto di una costante per X_1 stessa. Possiamo perciò dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sottogruppo generato da X_1 sia un sottogruppo invariante, è che tutte le parentesi:

$$(X_1 X_2), \dots, (X_1 X_r)$$

sieno eguali al prodotto di una costante per X_1.

Supponiamo ora che le trasformazioni infinitesimali indipendenti $X_1 \dots X_{r-m}$ comprese fra quelle r che formano un gruppo ad r parametri, formino da sè sole un gruppo, e quindi un sottogruppo ad $r - m$ parametri del dato. Perchè ciò accada, è necessario e sufficiente, come sappiamo, che le parentesi:

$$(X_i X_j), \qquad (i, j = 1, \dots r - m),$$

si esprimano come combinazioni lineari delle sole $X_1 \dots X_{r-m}$.

Ci possiamo proporre la questione di ricercare quando un tale sottogruppo è invariante. Ripetendo gli stessi ragionamenti surriferiti, si ottiene:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sud-

detto sottogruppo generato da $X_1 \dots X_{r-m}$, sia invariante rispetto al gruppo totale, è che le parentesi:

$$(X_i \ X_{r+m+j}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \dots r - m \\ j = 1 \dots \dots m \end{pmatrix} \qquad (13)$$

si esprimano linearmente e con coefficienti costanti, mediante le sole $X_1 \dots X_{r-m}$; per modo che si ha che ognuna delle prime $r-m$ X, combinate in parentesi con una delle medesime, o con una delle rimanenti, deve dare sempre una combinazione lineare, a coefficienti costanti delle sole prime $r-m$.

Abbiamo già visto (v. Cap. I, § 14) che se $X_1 \dots X_r$ formano un gruppo ad r parametri, anche la totalità delle parentesi $(X_j \ X_i)$ formano un gruppo che è identico al dato, o è un suo sottogruppo. Ora possiamo dimostrare facilmente che nel *secondo caso*, le $(X_j \ X_i)$ formano propriamente un sottogruppo invariante del gruppo dato; giacchè essendo:

$$(X_j \ X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s$$

si ha:

$$(X_h \ (X_j \ X_i)) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} (X_h \ X_s),$$

e in forza del precedente teorema, da questa formola resta dimostrato l'assunto.

Anche facilmente può dimostrarsi il seguente altro teorema:

Se, come sopra, $X_1 \dots X_{r-m}$ *formano un sottogruppo invariante del gruppo totale generato da*

$X_1 \dots X_r$, anche le parentesi costruite con le sole prime $r - m$ X, formano un sottogruppo invariante.

Infatti le parentesi $(X_j X_i)$ $(j, i = 1, \dots r - m)$, formano in ogni caso un gruppo che o è identico a quello generato da $X_1 \dots X_{r-m}$, o è un sottogruppo di esso, e quindi, in ogni caso, formano un sottogruppo del gruppo totale. Ora essendo invariante il sottogruppo generato da $X_1 \dots X_{r-m}$, si avranno le relazioni:

$$(X_i\, X_{r-m+j}) = \sum_{s=1}^{r-m} c_{i,r-m+j,s}\, X_s \begin{pmatrix} i = 1 \dots r - m \\ j = 1 \dots \dots m \end{pmatrix}.$$

Ma si ha identicamente:

$$((X_h\, X_i)\, X_{r-m+j}) + ((X_i\, X_{r-m+j})\, X_h) + \\ + ((X_{r-m+j}\, X_h)\, X_i) = 0\,,$$

onde sostituendo per $(X_i\, X_{r-m+j})$ il suo valore ricavato dalla precedente formola, e per:

$$(X_h\, X_{r-m+j})\,,$$

il valore analogo, supposto che h sia come i un indice fra $1, \dots, r - m$, si riconosce che:

$$((X_h\, X_i)\, X_{r-m+j})\,,$$

è esprimibile linearmente, con coefficienti costanti, mediante le parentesi $(X_s\, X_h)$, dove s e h hanno i soli valori $1, \dots r - m$, e con ciò il teorema è dimostrato.

CAPITOLO III.

Proprietà relative alla costituzione dei gruppi.

§ 1. Transitività dei gruppi.

Un gruppo si dice *transitivo*, quando in esso è compresa sempre almeno una trasformazione colla quale da un qualunque determinato sistema di valori $x_1 \dots x_n$, (compreso naturalmente nel campo $((x))$ in cui si ammette che devono essere compresi i valori delle variabili che il gruppo trasforma), si passa ad un qualunque altro anche prefissato sistema di valori, $x'_1 \dots x'_n$, del medesimo campo, cioè da un punto P dello spazio $((x))$ ad n dimensioni, si passi ad un qualunque altro prefissato punto P' del medesimo spazio.

Può avvenire che esistano trasformazioni per le quali, mentre P (arbitrario) si possa mutare in P' (anche arbitrario), si possa poi contemporaneamente mutare Q in Q' (ambedue anche arbitrarii); in tal caso si dirà che *il gruppo è doppiamente transitivo*, mentre che se ciò non si verifica, si ha la cosidetta *transitività semplice.* Similmente potrà definirsi la *transitività tripla, quadrupla, ... k-pla.*

Se:

$$x'_i = f_i\,(x_1 \ldots x_n\,,\ a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, \ldots n) \quad (1)$$

sono le formole per le trasformazioni del gruppo, dalla detta definizione risulta che possono fissarsi arbitrariamente in $((x))$ le x e le x' e ricavare in ogni caso dalle (1) almeno un sistema di valori, compreso nel solito campo $((a))$, per la a; bisognerà dunque che *il numero r sia eguale o maggiore di n*; se r fosse minore di n, allora fra le (1) potrebbero eliminarsi le a, e si ricaverebbero così delle relazioni identiche fra le x e le x', le quali dovrebbero sussistere per qualunque trasformazione del gruppo, e quindi non potrebbero più le x e le x' assegnarsi arbitrariamente e indipendenti tra loro; il gruppo perciò non potrebbe essere transitivo, e sarebbe *intransitivo*. Se $r \geqq n$, e se supponiamo che le (1) sieno risolubili rispetto ad n dei parametri a, in modo cioè che assegnate in un modo qualunque in $((x))$, le x e le x', e in $((a))$ i valori dei rimanenti parametri, restino fissati e compresi in $((a))$ i valori degli n parametri considerati, esisteranno allora delle trasformazioni che mutano le x nelle x' prefissate. Possiamo perciò dire:

Condizioni necessarie e sufficienti perchè il gruppo sia transitivo sono che, r sia maggiore o eguale ad n, e che le n equazioni (1) *sieno risolubili rispetto ad n dei parametri a, e che questa risolubilità sia intesa nel senso sopraindicato.*

È evidente, dalle cose dette, che *in ogni gruppo transitivo vi è sempre la trasformazione identica*

perchè vi deve essere sempre una trasformazione con cui un punto generico si trasforma in sè stesso.

Supponiamo ora che si tratti di un gruppo ad r parametri generato da r trasformazioni infinitesime; le trasformazioni del gruppo nell'intorno dell' identica possono sempre scriversi:

$$x'_i = x_i + \sum_{s=1}^{r} \lambda_s X_s x_i + \dots \tag{2}$$

Per la transitività bisogna e basta (oltre che $r \geqq n$), che queste equazioni sieno risolubili rispetto alle λ, sicchè bisogna e basta che la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_1} & \dots\dots & \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_r} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_1} & \dots\dots & \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_r} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

non sia identicamente nulla. Questa matrice, per $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ diventa (indicando al solito con $\xi_{1s} \dots \xi_{ns}$ i coefficienti di X_s):

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \dots\dots & \xi_{1r} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \xi_{n1} & \dots\dots & \xi_{nr} \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Possiamo dimostrare il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo generato dalle trasformazioni infinitesimali indipendenti $X_1 \ldots X_r$ sia transitivo, è che r sia maggior od eguale ad n, e la matrice (4) *sia diversa da zero*, il che può esprimersi anche dicendo *che fra le $X_1 \ldots X_r$ ve ne sieno esattamente n, e non meno, assolutamente indipendenti* (v. Cap. I, § 8).

Infatti se (4) non è zero, non lo può essere neanche (3), perchè la (4) è ciò che diventa (3) per $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, e quindi il gruppo è transitivo.

D'altra parte se (4) fosse zero, e avesse per caratteristica m, allora almeno un determinante di ordine m di (4) e quindi di (3) sarebbe diverso da zero; sicchè le (2) sarebbero risolubili rispetto ad m dei parametri λ, e quindi *al più*, da esse potrebbero ricavarsi $n - m$ relazioni fra le x e le x'. Ora essendo m la caratteristica di (4), si ha che delle $X_1 \ldots X_r$, m sono indipendenti e le altre si potranno esprimere linearmente con coefficienti funzioni delle x, mediante le prime, le quali sieno $X_1 \ldots X_m$. Se noi consideriamo il sistema di equazioni

$$X_1 F = 0, \quad \ldots \quad X_m F = 0, \tag{5}$$

queste formano un sistema completo, giacchè in primo luogo, essendo le X atte a generare un gruppo, una parentesi formata con due qualunque delle (5) si esprimerà linearmente e con coefficienti costanti mediante tutte le $X_1 \ldots X_r$, e in secondo luogo sostituendo in tale espressione lineare, per $X_{m+1} \ldots X_r$, i loro valori espressi li-

nearmente e con coefficienti variabili mediante le sole $X_1 \ldots X_m$, ne risulta infine che ogni parentesi formata con due qualunque dei primi membri delle (5) si esprimerà linearmente, e con coefficienti variabili mediante i medesimi primi membri delle (5), le quali perciò formano come si è detto un sistema completo. (V. Cap. I, § 10.)

Le (5) avranno perciò $n - m$ integrali indipendenti comuni, che possiamo scrivere:

$$\Omega_1(x), \;\ldots\; \Omega_{n-m}(x), \qquad (6)$$

e che saranno anche integrali di tutte le rimanenti equazioni:

$$X_{m+1} F = 0, \;\ldots\; X_r F = 0.$$

In forza del teorema fondamentale del § 1 del Cap. II, le (6) sono perciò invarianti rispetto al gruppo dato, cioè trasformando in esse le x nelle x', date dalle (2), si otterrà:

$$\Omega_1(r) = \Omega_1(x') \;\ldots\; \Omega_{n-m}(x) = \Omega_{n-m}(x'). \quad (7)$$

Dunque esistono effettivamente $n - m$ relazioni indipendenti fra le x e le x' e quindi il gruppo è certamente intransitivo.

Da questo teorema e dalla dimostrazione fatta di sopra, possiamo ricavare una conseguenza importante. Noi abbiamo visto che *al più* si potranno trovare $n - m$ relazioni fra le x e le x', e indi ne abbiamo trovato effettivamente $n - m$ indipendenti, cioè le (7), ad ognuna delle quali corrisponde una funzione Ω invariante rispetto al

gruppo; se vi fosse altro invariante, si ricaverebbe, nello stesso modo come sopra, un' altra relazione, il che abbiamo visto impossibile. Possiamo dunque dire che i soli invarianti del gruppo dato devono essere i (6), cioè:

Un gruppo transitivo non ha alcun invariante; un gruppo intransitivo ha per unici invarianti le soluzioni comuni delle equazioni:

$$X_1 F = 0, \ \dots \ X_r F = 0,$$

e conosciute le formole finite per le trasformazioni del gruppo, questi invarianti si possono ottenere con un processo di eliminazione.

È utile inoltre osservare quanto segue: se il numero r dei parametri è esattamente n, e se le n trasformazioni infinitesimali sono *assolutamente* indipendenti, allora il gruppo è transitivo; le formole di trasformazione saranno risolubili rispetto agli n parametri, i quali acquisteranno perciò valori determinati quando si assegnano dei valori alle x e x'; vi sarà perciò in generale una sola trasformazione che muta un punto arbitrario in un altro punto arbitrario, e quindi non potrà aversi più che la transitività *semplice*. Cioè: *Un gruppo transitivo ad n parametri, è semplicemente transitivo*, o anche: *un gruppo ad n parametri e di cui le n trasformazioni infinitesimali sieno assolutamente indipendenti, è semplicemente transitivo.*

Non può però evidentemente affermarsi il teorema reciproco, perchè per aversi p. es. la transitività doppia, si vede, con le stesse considerazioni fatte sul principio di questo paragrafo, che deve

essere possibile soddisfare contemporaneamente, coi medesimi valori degli r parametri, $2n$ equazioni contenenti le coordinate di *quattro punti arbitrarii*, e quindi r non può essere minore di $2n$.

§ 2. Imprimitività dei gruppi.

Abbiamo visto nel § precedente che quando il gruppo è intransitivo, esistono h funzioni:

$$\Omega_1(x), \ \ldots \ \Omega_{n-m}(x),$$

le quali restano inalterate per le trasformazioni del gruppo. Se noi poniamo:

$$\Omega_1(x) = c_1 \ \ldots \ \Omega_{n-m}(x) = c_{n-m}, \tag{1}$$

dove le c abbiano dei valori arbitrarii costanti, abbiamo una varietà ad m dimensioni dello spazio delle x ad n dimensioni, la quale si trasforma in sè stessa per tutte le trasformazioni del gruppo, e ciò qualunque sieno i valori delle costanti c. Facendo dunque variare in tutti i modi possibili i valori di queste costanti, si ha una divisione dello spazio ad n dimensioni in ∞^{n-m} spazii ad m dimensioni, ciascuno dei quali resta immutato per le trasformazioni del gruppo.

Supponiamo ora, più generalmente, che si possa fare un'analoga divisione dello spazio ad n dimensioni, in spazi inferiori ad m dimensioni, in maniera però che per le trasformazioni del gruppo non resti inalterato ciascuno di tali spazi ad m dimensioni, ma questi si scambino gli uni negli al-

tri, in modo cioè che se il punto P si muti in P', tutto lo spazio ad m dimensioni cui appartiene P, si muti in tutto quello cui appartiene P'. Se ciò si verifica, noi diremo che il gruppo è *imprimitivo;* altrimenti lo diremo *primitivo.* Evidentemente la intransitività è, da questo punto di vista, un caso particolare dell'imprimitività.

Ogni gruppo intransitivo è anche imprimitivo.
Ogni gruppo primitivo è necessariamente transitivo.

Sieno come sopra:

$$\Omega_1(x) c_1, \quad \ldots \quad \Omega_{n-m}(x) = c_{n-m}, \tag{2}$$

le equazioni che corrispondono alla supposta divisione dello spazio nel modo indicato; per un teorema sui sistemi completi, cui abbiamo accennato nel Cap. I, § 10, si potrà allora trovare un sistema completo di equazioni a derivati parziali:

$$Y_1 F = 0, \quad \ldots \quad Y_m F = 0, \tag{3}$$

di m equazioni, i cui integrali indipendenti sieno dati da (2).

Poichè il gruppo dato non fa, per ipotesi, che scambiare fra loro gli spazi ad m dimensioni, di cui le equazioni sono date da (2), esso lascerà inalterato il sistema degli integrali di (3), cioè scambia integrali di (3) in integrali di (3). Il sistema completo (3) è dunque invariante rispetto al gruppo, giusta la definizione data nel Cap. II, § 6, e perciò, giusta il teorema ivi dimostrato, si deduce che le parentesi $(Y_h X_k)$ devono esprimersi come combinazioni lineari a coefficienti variabili delle Y stesse, essendo le X al solito le trasformazioni infinitesimali del gruppo dato. E

viceversa, se ciò si verifica, il sistema delle $YF = 0$ è invariante rispetto al gruppo, ed esistono quindi gli integrali (2) rappresentanti la solita divisione dello spazio. Possiamo perciò dire:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo ad r parametri, generato dalle trasformazioni infinitesimali $X_1 \ldots X_r$ sia imprimitivo, è che esista un sistema completo di equazioni a derivate parziali:

$$Y_1 F = 0, \ \ldots \ Y_m F = 0,$$

tale, che si abbiano le relazioni:

$$(Y_h X_k) = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{hks} Y_s, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots m \\ k = 1, 2 \ldots r \end{pmatrix},$$

cioè, in altri termini, che esista un sistema completo invariante rispetto ad esso.

Naturalmente un gruppo potrà essere imprimitivo in varii modi; dal teorema di sopra risulta che lo sarà in tanti modi diversi, quanti sono i diversi sistemi completi invarianti rispetto al gruppo stesso.

Ogni sistema come (2) si chiama *un sistema di imprimitività.* Si può osservare che dati due sisistemi di imprimitività, l'uno corrispondente alla divisione dello spazio totale in spazi ad m dimensioni, l'altro alla divisione in spazi ad m' dimensioni, *se $m + m'$ è maggiore od uguale ad n*, si può ricavare un terzo sistema di imprimitività, corrispondente ad una divisione in spazii ad $m + m' - n$ dimensioni i quali si ottengono considerando l'intersezione generica di ciascuno

dei suddetti spazii ad m dimensioni, con ciascuno dei suddetti spazi ad m' dimensioni.

Dal teorema precedente può ricavarsi anche una conseguenza notevole. Supponiamo che il gruppo dato contenga una trasformazione infinitesima eccezionale (v. Cap. II, § 8), e sia, per fissare le idee, $X = \sum c_i X_i$, dove le c abbiano dei determinati valori costanti: allora l'equazione $XF = 0$ (la quale naturalmente può considerarsi come costituente sempre un sistema completo, perchè è una sola), soddisfa alle condizioni del teorema, perchè tutte le parentesi $(X X_i)$ sono zero, e perciò possiamo affermare che:

Se un gruppo contiene una trasformazione infinitesima eccezionale, esso è certamente imprimitivo.

Dato un gruppo imprimitivo, se ne può costruire sempre almeno un altro che è con esso in una intima relazione, e che noi chiameremo *gruppo di imprimitività*, ma di ciò tratteremo nel Cap. IV, § 4.

Abbiamo detto che un gruppo intransitivo è imprimitivo; ora è importante notare che *anche un gruppo semplicemente transitivo, avente però esattamente n trasformazioni infinitesimali indipendenti, cioè tante per quante sono le variabili x, è imprimitivo.*

Per dimostrare questo teorema dobbiamo ricorrere alla teoria dei cosidetti *gruppi reciproci*, di cui tratteremo nel Cap. IV, § 6.

Dato un gruppo semplicemente transitivo ad $n > 1$ parametri essenziali, ne esiste un altro anche semplicemente transitivo e ad n parametri, detto reciproco del primo, e tale che le sue trasformazioni infinitesimali Y sono rispetto a quelle X del dato nelle relazioni semplici:

$$(X_i\, Y_j) = 0 \qquad (i, j = 1 \ldots n).$$

Ora se n è maggiore di 1, il gruppo delle Y avrà certamente dei sottogruppi, p. es., quelli generati dalle singole Y; sia in generale uno dei suoi sottogruppi quello generato da:

$$Y_1 \ldots Y_m, \qquad (m < n).$$

Allora il sistema delle equazioni differenziali:

$$Y_1 F = 0, \ \ldots \ Y_m F = 0$$

sarà un sistema completo, e la sua esistenza dimostra senz'altro la imprimitività del gruppo, giacchè esso soddisfa alle relazioni:

$$(X_i\, Y_j) = 0, \qquad (i = 1 \ldots n;\, j = 1 \ldots m),$$

le quali sono caso particolare di quelle che bastano per dedurre la imprimitività, (v. sopra). Con ciò il teorema è dimostrato.

§ 3. Sistaticità di un gruppo.

Riportiamoci per un momento alle considerazioni sviluppate alla fine del Cap. II, § 5. Ivi abbiamo definito che cosa si intende per gruppo

di stabilità relativo ad un punto di posto generale, e abbiamo visto che dato un gruppo ad r parametri, se le r trasformazioni infinitesimali di esso non sono assolutamente indipendenti, ma ve ne sono $r - h$ di tali, allora il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto x^0 di posto generale è precisamente ad h parametri, e le trasformazioni infinitesimali da cui esso è generato, sono le h trasformazioni:

$$X_{r-h+s} - \chi_{s1}(x^0) X_1 - \ldots - \chi_{s,r-h}(x^0) X_{r-h}, \quad (1)$$

dove le χ hanno i significati indicati a suo luogo e che ora per brevità, non ripetiamo.

Per ogni punto x^0 di posto generale esiste uno speciale sottogruppo di stabilità del gruppo dato; ora ci proponiamo la questione di esaminare quando è che due o più di tali sottogruppi di stabilità possano coincidere.

Se invece del punto x^0, consideriamo un punto x^1, il relativo sottogruppo di stabilità sarà quello generato dalle:

$$X_{r-h+s} - \chi_{s1}(x^1) X_1 - \ldots - \chi_{s,r-h}(x^1) X_{r-h}, \quad (2)$$

e quindi i due sottogruppi coincideranno, quando ogni (2) è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle (1); ma a causa della indipendenza *semplice* delle X (indipendenza che si presuppone, perchè si ammette che esse formino un gruppo ad r parametri essenziali), ne viene che ciascuna delle (2) deve essere identica alla corrispondente delle (1), e quindi deve aversi che le χ per il punto x^0 sieno le medesime che quelle per il punto x^1.

Se noi poniamo:

$$\chi_{s,t}(x_1 \ldots x_n) = \chi_{st}(x_1^0 \ldots x^0_n), \qquad (3)$$

e troviamo tutti i valori $x_1 \ldots x_n$ per cui queste $h(r-h)$ relazioni sono soddisfatte, otteniamo *tutti* i punti x, i cui gruppi di stabilità coincidono con quello di x^0.

Ora due casi possono darsi, cioè: o queste equazioni in cui per x^0 si intende un punto di posto generale (v. la definizione di ciò nel Cap. II, § 5), si riducono *a meno* di n equazioni indipendenti, ovvero no.

Nel primo caso vi sarà evidentemente una infinità di punti x, formanti un tutto continuo cui appartiene x^0, i cui sottogruppi di stabilità coincidono con quello di x^0; nel secondo caso vi potranno essere solamente dei punti isolati di tale specie. Se si verifica il primo caso, cioè se, dato un punto x^0 di posto generale, esiste una varietà continua, cui esso anche appartiene, e i cui punti hanno tutti il medesimo sottogruppo di stabilità, diremo che il gruppo dato è *sistatico* (Engel), nell'altro caso diremo che è *asistatico*.

Evidentemente possiamo allora enunciare il teorema:

Dato un gruppo con r trasformazioni infinitesimali, di cui le prime $r-h$ sieno assolutamente indipendenti, mentre le altre si esprimano con le formole:

$$X_{r-h+s} = \chi_{1s}(x) X_1 + \ldots + \chi_{s,r-h}(x) X_{r-h},$$

mediante le prime, il gruppo è sistatico o asistatico secondo che delle $h(r-h)$ funzioni χ ve ne

sieno di indipendenti meno di n ovvero un numero eguale o maggiore di n.

Si può far vedere che:

Un gruppo sistatico è sempre imprimitivo.

Per dimostrare questo teorema dobbiamo distinguere due casi, e cioè: in primo luogo, quando di funzioni χ (di cui nel nostro caso ne deve esistere di indipendenti un numero minore di n) effettivamente ne esiste un numero maggiore di zero, cioè h è maggiore di zero; e poi, quando h è eguale a zero, cioè quando le r trasformazioni infinitesimali sono tutte assolutamente indipendenti, nel qual caso non esistono più le funzioni χ.

Supponiamo prima che si abbiano $n-\rho$ funzioni χ indipendenti e sieno $\chi_1 \ldots \chi_{n-\rho}$. Formiamo le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1(x_1 \ldots x_n) = \text{cost.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{n-\rho}(x_1 \ldots x_n) = \text{cost.} \end{array}\right\} \quad (4)$$

le quali rappresenteranno una divisione dello spazio ad n dimensioni in $\infty^{n-\rho}$ spazi a ρ dimensioni; io dico che questa divisione corrisponde ad un sistema di imprimitività, cioè che, se chiamiamo M una delle varietà rappresentate da (4), e se una trasformazione τ muta tutti i punti di M in tutti i punti di una varietà M', questa sarà anche rappresentata da (4), con diversi valori delle costanti.

Fissando in (4) per le costanti valori determinati, si ha la varietà M i cui punti hanno tutti il medesimo sottogruppo di stabilità; il sottogruppo

di stabilità dei punti di M', trasformati di quelli di M mediante la medesima τ, è il trasformato di quello dei singoli punti di M, e ciò per un teorema enunciato alla fine del Cap. II, § 5. Perciò tutti i punti di M' hanno il medesimo sottogruppo di stabilità, il che mostra che M' è un'altra delle varietà rappresentate dalle formole (4); e ciò è quello che si voleva dimostrare.

Se poi h è zero, cioè le r trasformazioni infinitesimali sono tutte fra loro assolutamente indipendenti, allora il numero r non può essere maggiore di n (v. Cap. I, § 8) e quindi o $r < n$ o $r = n$. Se $r < n$, il gruppo è intransitivo e quindi imprimitivo; se $r = n$, essendo assolutamente indipendenti le trasformazioni infinitesimali, il gruppo è semplicemente transitivo ed ha esattamente n trasformazioni infinitesimali (v. Cap. III, § 1) e quindi è imprimitivo (v. Cap. III, § 2). Così il teorema resta dimostrato in ogni caso.

§ 4. Isomorfismo di due gruppi.

Sia dato un gruppo ad r parametri essenziali, generato al solito dalle trasformazioni infinitesimali $X_1 \ldots X_r$.

Si sa che allora sussistono le relazioni:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s \,, \qquad (1)$$

e l'assieme dei numeri costanti c_{jis}, forma ciò che si dice la *struttura* del gruppo. È chiaro però che

i numeri c non sono determinati in modo unico per un medesimo gruppo, ma i loro valori variano secondo la scelta delle r trasformazioni infinitesimali indipendenti; se in luogo p. es. di X_1 si pone una combinazione lineare a coefficienti costanti di tutte le X, si otterranno dei nuovi numeri c, e si potrebbero facilmente determinare le relazioni esistenti fra i nuovi e gli antichi.

Inoltre se insieme alle $X_1 \dots X_r$, che naturalmente si immaginano semplicemente indipendenti, si considera una combinazione lineare a coefficienti costanti delle medesime, e si chiama X_{r+1}, il sistema totale delle $X_1 \dots X_r\, X_{r+1}$, le quali però non sono più indipendenti, soddisferanno naturalmente ancora a relazioni del tipo (1), e si potrebbero allora trovare i numeri c corrispondenti a questo nuovo sistema di X; e similmente se si aggrega in analogo modo un qualunque numero di trasformazioni infinitesimali, appartenenti tutte al gruppo dato.

Se due gruppi aventi lo stesso numero r di parametri essenziali, sono tali che fissando in uno di essi in un determinato modo il sistema delle $X_1 \dots X_r$ indipendenti, si possano scegliere per l'altro in tal modo le r trasformazioni infinitesimali indipendenti, $Y_1 \dots Y_r$, che i numeri c riescano rispettivamente eguali nei due casi, allora si dirà che i due gruppi ad egual numero di parametri sono di *eguale struttura*.

Ora, coll'osservazione fatta di sopra, che cioè possono considerarsi dei numeri c relativi anche ad un sistema di trasformazioni infinitesimali non tutte indipendenti, e più esteso di quello costituito

dalle sole indipendenti, il precedente concetto può essere esteso, e si giunge così al concetto *dell'isomorfismo fra due gruppi*, anche non aventi il medesimo numero di parametri essenziali. — Propriamente, se, dati due gruppi, rispettivamente di r ed r' parametri essenziali, in cui sia $r' \leq r$, scelte r trasformazioni infinitesimali indipendenti del primo gruppo, $X_1 \ldots X_r$, si possano scegliere r trasformazioni infinitesimali $Y_1 \ldots Y_r$ del secondo gruppo, (non tutte naturalmente indipendenti, ma comprendenti r' indipendenti), in maniera che i numeri c per i due sistemi riescano rispettivamente eguali, allora si dirà che *i due gruppi sono isomorfi*. Si distinguerà poi l'isomorfismo *oloedrico* dal *meriedrico*, il primo caso avendosi quando r' è eguale ad r, cioè quando i due gruppi hanno il medesimo numero di parametri essenziali, il secondo caso invece quando r' è minore di r.

Quando l'isomorfismo è *meriedrico*, è chiaro che a più trasformazioni infinitesimali del primo gruppo (cioè di quello avente un numero maggiore di parametri essenziali), corrisponde una sola del secondo. In effetti se r' è minore di r, fra le $Y_1 \ldots Y_r$ sussisteranno $r - r'$ relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, e sieno:

$$\left.\begin{array}{l} e_{11}\, Y_1 + \ldots + e_{1r}\, Y_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{r-r',1}\, Y_1 + \ldots + e_{r-r',r}\, Y_r = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Sia ora:

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_r Y_r , \quad (3)$$

una trasformazione infinitesimale del secondo gruppo; ad essa corrisponderà nel primo la trasformazione infinitesimale:

$$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r ; \tag{4}$$

ma, mediante le (2), la (3) può modificarsi di forma in infiniti modi, e propriamente in $\infty^{r-r'}$ modi, giacchè posta la (3) sotto l'altra forma:

$$\mu_1 Y_1 + \ldots + \mu_r Y_r , \tag{5}$$

e fatta la differenza con la (3), si ha che l'equazione:

$$(\mu_1 - \lambda_1) Y_1 + \ldots + (\mu_r - \lambda_r) Y_r = 0,$$

deve essere conseguenza delle (2), e perciò, eguagliando a zero la matrice dei coefficienti di (2) e di (5), si hanno r' equazioni lineari fra le r quantità μ, e quindi queste possono avere appunto $\infty^{r-r'}$ valori diversi.

Intanto messa la (3) sotto la forma equivalente (5), ad essa nel primo gruppo non corrisponde più la (4), ma la:

$$\mu_1 X_1 + \ldots + \mu_r X_r , \tag{6}$$

e quindi resta provato che alla medesima trasformazione infinitesimale del secondo gruppo, ne corrispondono $\infty^{r-r'}$ del primo.

Colla definizione data si è venuta a stabilire una corrispondenza fra le trasformazioni infinitesime dei due gruppi isomorfi e quindi (poichè ogni trasformazione infinitesima è la generatrice di un gruppo ad un sol parametro contenuto nel dato), si viene a stabilire una corrispondenza fra i sot-

togruppi ad un parametro contenuti nei due gruppi dati. Di qui può facilmente passarsi a stabilire una corrispondenza fra le trasformazioni finite stesse, fissando cioè che si corrispondano fra loro le trasformazioni di due sottogruppi, già corrispondentisi, ad un parametro, *per le quali sia il medesimo il valore del parametro t.*

La corrispondenza che così si viene ad avere fra le singole trasformazioni finite di due gruppi isomorfi, ha una proprietà fondamentale caratteristica, la quale potrebbe servire anche come base della definizione dell'isomorfismo, ottenendo così una definizione la quale avrebbe perfetta analogia con quella che si dà nella teoria ordinaria dei gruppi discontinui di sostituzioni; e tale proprietà è che *al prodotto di due trasformazioni di un medesimo gruppo, corrisponde nel gruppo isomorfo il prodotto delle due corrispondenti trasformazioni.* Questa proprietà che stabilisce la perfetta analogia esistente fra l'isomorfismo, secondo che è definito da Lie nella teoria delle trasformazioni, e quello relativo alla ordinaria teoria delle sostituzioni, si dimostra nel trattato di Lie (*Th. der Transformationsgruppen*, Leipzig, 1888, vol. I, p. 203 e 418-420) ricorrendo al cosiddetto *gruppo parametrico* (*Parametergruppe*) (v. Cap. IV, § 3).

Ora noi vogliamo far vedere come questa proprietà si possa facilmente dimostrare ricorrendo ancora alla formola del prodotto di due trasformazioni finite di cui abbiamo trattato nel Cap. I, § 9.

Supposto infatti che Z_1, Z_2 sieno due combinazioni lineari a coefficienti costanti delle X, e che

Z_1', Z_2' sieno le analoghe combinazioni lineari delle Y, la trasformazione prodotto delle due:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x_i + \frac{t}{1!} Z_1 x_i + \dots \\ x''_i &= x'_i + \frac{t}{1!} Z_2 x'_i + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sarà:

$$x''_i = x_i + \frac{1}{1!} Z_3 x_i + \dots \qquad (3)$$

dove Z_3 è dato dalla solita formola (7) del Cap. I, § 9, (mutandovi naturalmente le X nelle Z), la quale, per mezzo delle prime relazioni (1) si riduce ad una combinazione lineare delle X, con coefficienti numerici dipendenti dalle t, t', γ, e dalle c.

Se ora dal primo gruppo passiamo al secondo lasciando i medesimi t e t', dobbiamo solamente mutare le X nelle Y, e quindi le Z nelle Z'; la Z_3' relativa al nuovo prodotto risulterà, poichè le c non mutano passando dal primo gruppo al secondo, la *medesima* combinazione lineare nelle Y, che la Z_3 era nelle X; e con ciò è dimostrato l'assunto (v. PASCAL, *Sulla formola del prodotto* ecc., *Rend. Ist. Lomb.* (2), t. 34, 1901).

È degno di nota che questa dimostrazione vale indifferentemente per l'isomorfismo oloedrico e per il meriedrico; quella invece contenuta nella succitata Opera di LIE, non ha questo vantaggio.

Supponiamo assegnati due gruppi isomorfi meriedricamente, l'uno ad r, l'altro ad $r' < r$ para-

metri essenziali; dell'uno le trasformazioni infinitesimali (indipendenti) sieno, come sopra, $X_1 ... X_r$, e dell'altro le r trasformazioni infinitesimali, corrispondenti nel modo suindicato alle X, e fra loro legate dalle $r - r'$ relazioni (2), sieno $Y_1 ... Y_r$. Risolviamo le (2) rispetto ad $r - r'$ delle Y, e propriamente, supposto, per fissare le idee, che $Y_1 ... Y_{r'}$ sieno indipendenti, risolviamo le (2) rispetto ad $Y_{r'+1} ... Y_r$, ed otteniamo cosí:

$$Y_{r'+h} - \sum_{i=1}^{r'} \varepsilon_{h,i} Y_i = 0 \quad (h = 1, \ldots, r - r'). \quad (7)$$

Se consideriamo il primo membro di (7) come una trasformazione infinitesimale del secondo gruppo, ad essa corrisponderà nel primo la trasformazione infinitesimale:

$$X_{r'+h} - \sum_{i=1}^{r'} \varepsilon_{h,i} X_i \quad (h = 1, \ldots, r - r'), \quad (8)$$

e si corrisponderanno al solito i due sottogruppi ad un parametro generati rispettivamente dall'una e dall'altra. Però essendo zero identicamente il primo membro della (7), il sottogruppo generato dalla trasformazione infinitesima che esso rappresenta, è costituito solamente dalla trasformazione identica, mentre d'altra parte, potendo h avere $r - r'$ valori, di trasformazioni infinitesimali (8), fra loro distinte, ve ne saranno $r - r'$, e quindi altrettanti sottogruppi ad un parametro, e perciò $\infty^{r-r'}$ trasformazioni finite generate da tutte le (8); dunque possiamo dire che:

Se i due gruppi dati sono isomorfi meriedricamente, alla trasformazione identica del secondo,

corrispondono $\infty^{r-r'}$ trasformazioni del primo gruppo, formanti $r - r'$ sottogruppi ad un parametro del medesimo.

Si può dimostrare, prima di tutto, che *queste $\infty^{r-r'}$ trasformazioni formano un gruppo*, e a tal fine mostreremo che le (8) soddisfanno al secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi (Cap. I, § 14). Chiamando per un momento Ξ_h la (8), e Υ_h il primo membro di (7), formando le parentesi $(\Xi_h \Xi_k)$, si otterranno in generale delle combinazioni lineari delle X, a coefficienti costanti, i cui valori, a cagione dell'isomorfismo, devono essere precisamente eguali a quelli che si ottengono formando le parentesi $(\Upsilon_h \Upsilon_k)$. Queste ultime parentesi sono *zero*, perchè tal valore hanno le (7); e propriamente possiamo dire che esse sono zero tenuto conto delle equazioni (7), ovvero che l'annullarsi delle espressioni lineari delle Y cui sono eguali queste ultime parentesi, è una conseguenza delle (7) stesse, o, infine, che le parentesi $(\Upsilon_h \Upsilon_k)$ sono esprimibili linearmente, e con coefficienti naturalmente costanti, mediante le Υ.

Di qui ne risulta che anche le parentesi $(\Xi_h \Xi_k)$ saranno esprimibili linearmente con coefficienti costanti mediante le Ξ, e che quindi queste formano un gruppo.

Questo gruppo, che sarà naturalmente un sottogruppo di quello generato da tutte le X, è un sottogruppo invariante di questo (v. Cap. II, § 8).

Per dimostrare ciò bisogna far vedere che le parentesi:

$$(X_l, \Xi_h) \qquad \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, r \\ h = 1, \ldots, r - r' \end{pmatrix}$$

si esprimono linearmente e con coefficienti costanti mediante le Ξ stesse.

Ora per far vedere ciò non c'è che ripetere lo stesso ragionamento fatto di sopra, e cioè, essendo tutte le parantesi (Y_l, Y_h) zero, perchè tali sono le Y_h, ne viene che esse dovranno esprimersi linearmente e con coefficienti costanti, mediante le Y stesse, e quindi, a causa dell'isomorfismo, lo stesso deve avvenire per le parentesi (X_l, Ξ_h).

§ 5. Similitudine di due gruppi.

Abbiamo già detto nel § 2 del Cap. I, cosa s'intende per similitudine fra due gruppi; due gruppi:

$$x'_i = f_i(x, a), \tag{1}$$

$$y'_i = \varphi_i(y, a'), \tag{2}$$

si dicono *simili*, quando si possono porre le x funzioni delle y, le x' funzioni analoghe delle y', e le a funzioni delle a', in maniera che le formole di trasformazione (1) si riducano esattamente alle (2). In tal maniera si verrà, come abbiamo già a suo tempo osservato, a stabilire una corrispondenza biunivoca fra le trasformazioni dei due gruppi, e si vede poi immediatamente che alla trasformazione identica dell'uno (se c'è), corrisponderà la trasformazione identica dell'altro.

È evidente, prima di tutto, che *una condizione necessaria per la similitudine, è che i due gruppi abbiano lo stesso numero di parametri essenziali.*

Supponiamo che si tratti al solito di due gruppi ad r parametri essenziali, e che sieno $X_1 \ldots X_r$, r trasformazioni infinitesimali indipendenti del primo, e $Y_1 \ldots Y_r$, r del secondo. Sieno:

$$y_i = F_i(x), \tag{3}$$

le formole colle quali le x si trasformano nelle y, in maniera che, per mezzo delle (3), le formole (1) diventino le (2); se allora le formole (1) le poniamo (nell'intorno della trasformazione identica) sotto la solita forma:

$$x'_i = x_i + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s X_s x_i + \ldots \tag{4}$$

dove i parametri sono ora i $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_r$, si ha:

$$F_i(x') = F_i(x) + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s X_s F_i(x) + \ldots \tag{5}$$

Intanto con la introduzione delle y in luogo delle x, la trasformazione infinitesimale X_s diventa una trasformazione infinitesimale espressa nelle y, e che noi chiameremo Υ_s, e se le:

$$X_1 \ldots X_r$$

sono semplicemente indipendenti, lo saranno anche le $\Upsilon_1 \ldots \Upsilon_r$. Le (5) diventano allora:

$$y'_i = y_i + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s \Upsilon_s y_i + \ldots \tag{6}$$

Ma intanto una analoga forma devono ricevere, per le ipotesi fatte, le formole di trasformazione

del gruppo (2); propriamente esse devono potersi scrivere (sempre si intende nell'intorno della trasformazione identica):

$$y'_i = y_i + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda'_s \Upsilon_s y_i + \ldots \qquad (7)$$

e perciò queste formole devono coincidere con le (6), avendo già osservato che nei due gruppi devono corrispondersi le due trasformazioni identiche, e quindi anche, per il principio di continuità, devono corrispondersi fra loro quelle contenute negli intorni rispettivi delle identiche. Di qui viene che le Υ devono essere delle combinazioni lineari a coefficienti costanti delle Y, e viceversa; in altri termini, se i due gruppi sono simili, le trasformazioni infinitesime indipendenti dell'uno, devono trasformarsi in quelle dell'altro. D'altra parte è chiaro che se questo accade, i due gruppi sono simili.

Abbiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due gruppi ad r parametri essenziali, sieno simili, è che esistano delle relazioni fra le variabili dell'uno e quelle dell'altro, mediante le quali dalle trasformazioni infinitesime del primo, si passi a quelle dell'altro.

Dalla dimostrazione precedente risulta che se si assumono, in luogo delle Y, le Υ per trasformazioni infinitesime indipendenti del secondo gruppo, i parametri *canonici* della trasformazione che, nel secondo gruppo, corrisponde alla trasformazione (4) del primo, sono $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_r$, cioè i medesimi parametri canonici della (4); quindi se *i due gruppi*

sono simili, con opportuno cangiamento di parametri, si potrà fare in modo che le trasformazioni corrispondenti dei due gruppi, sieno quelle aventi i medesimi valori dei parametri.

Inoltre essendo le Y_s eguali alle X_s, la parentesi $(Y_h Y_k)$ sarà eguale a $(X_h X_k)$, e perciò tali parentesi si esprimeranno linearmente mediante le Y_s e X_s rispettivamente, con i medesimi coefficienti costanti c_{hks}; in altri termini è chiaro che i due gruppi hanno la stessa struttura, cioè sono oloedricamente isomorfi (v. § prec.). Dunque:

Due gruppi simili sono oloedricamente isomorfi.

Non può dirsi però che reciprocamente, due gruppi oloedricamente isomorfi sono simili, ma perchè ciò sia, è necessario che si verifichino certe altre condizioni.

Per mostrare ciò, supponiamo che fra le:

$$X_1 \dots X_r \,,$$

ve ne sieno $\rho \leqq r$ le quali sieno *assolutamente* indipendenti, non legate cioè da alcuna relazione lineare a coefficienti funzioni delle x, e sieno:

$$X_1 \dots X_\rho \,,$$

mentre poi le altre si esprimano linearmente e a coefficienti variabili, mediante le prime:

$$X_{\rho+h} = \sum_{s=1}^{\rho} \gamma_{hs}(x)\, X_s \,. \tag{8}$$

Se ora i due gruppi sono simili, e quindi esiste una trasformazione la quale trasformi le trasformazioni infinitesimali dell'uno in quelle dell'altro, bisogna che le $Y_1 \dots Y_r$ in cui si trasformano ri-

spettivamente le $X_1 \ldots X_r$, soddisfacciano alle stesse proprietà delle X, e cioè che di esse le prime ρ sieno indipendenti assolutamente (cioè non sussista alcuna relazione a coefficienti variabili fra le prime ρ di esse) e le altre $r - \rho$ si esprimano mediante le prime ρ con relazioni come le (8), e nelle quali i coefficienti $\psi_{hs}(y)$, che vi compariscono in luogo dei coefficienti $\chi_{hs}(x)$, sieno le stesse $\chi(x)$ dove alle x si sieno sostituiti i loro valori mediante le y. D'altra parte queste Y devono poi essere di quelle che combinate in parentesi a due a due, danno luogo ad un sistema di numeri costanti c_{hks}, perfettamente eguale a quello che si ottiene dalle X. Si vede quindi che: *condizione necessaria perchè i due gruppi isomorfi sieno simili è che, scelte in un modo qualunque le X indipendenti del primo gruppo, esista per il secondo gruppo un sistema come $Y_1 \ldots Y_r$, godente contemporaneamente delle suindicate proprietà, e cioè, che mentre i numeri c ricavati da esso sieno identici a quelli ricavati dalle X, si abbia poi ancora che le prime ρ delle Y sieno assolutamente indipendenti, e le altre $r - \rho$ si esprimano linearmente mediante le prime ρ, con coefficienti $\psi_{hs}(y)$ tali che le differenze $\chi_{hs}(x) - \psi_{hs}(y)$ eguagliate a zero dieno luogo a $\rho(r - \rho)$ equazioni non incompatibili, e dalle quali non possano eliminarsi contemporaneamente, o tutte le x o tutte le y.*

Come si vede la precedente condizione è *necessaria* per la similitudine dei due gruppi; essa è però anche *sufficiente*, cioè, soddisfatta che essa sia, si potrà sempre trovare una trasformazione delle x nelle y, la quale riduca le trasformazioni

infinitesimali del primo gruppo a quelle del secondo.

Per ragioni di brevità noi non vogliamo addentrarci nei particolari di questa dimostrazione per il caso generale, per il quale rimandiamo alle pag. 341 e seg. del 1° Vol. dell'Opera di LIE (*Th. d. Transform.* ecc.). Ci limiteremo solo, seguendo la suindicata Opera di LIE a considerare il caso speciale in cui ρ sia eguale ad r, cioè in cui le r trasformazioni infinitesime X, sieno *assolutamente* indipendenti.

Poichè sappiamo che fra $n+1$ trasformazioni infinitesime ad n variabili, sussiste sempre una relazione lineare, risulta che quando $\rho = r$, deve essere $n \geqq r$.

Essendo inoltre, per l'ipotesi fatta, tutte le X assolutamente indipendenti, non esisteranno più nel nostro caso, le funzioni χ di cui si parla nel teorema di sopra, e quindi questo si riduce semplicemente a ciò:

Due gruppi isomorfi oloedricamente, e di cui il primo è tale che le sue r trasformazioni infinitesime sieno assolutamente indipendenti (e quindi $n \geqq r$), sono simili, allora e allora solo che anche le r trasformazioni infinitesime del secondo, sieno assolutamente indipendenti.

Per dimostrare questo teorema, supponiamo che scelte le X del primo gruppo, si sieno trovate le corrispondenti Y del secondo, in maniera, al solito, che il sistema dei numeri c_{hks} sia il medesimo. Poniamo:

$$X_k + Y_k = Z_k, \tag{9}$$

Si otterranno dei simboli di trasformazioni infinitesime Z, espresse sia nelle variabili x che nelle y; essendo:

$$(X_h X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} X_s ,$$

$$(\Upsilon_h \Upsilon_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \Upsilon_s ,$$

si otterrà:

$$(Z_h Z_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} Z_s , \qquad (10)$$

e quindi le Z generano un gruppo ad r parametri essenziali, e di cui le variabili sono le x e le y contemporaneamente; le formole canoniche di trasformazione di questo gruppo, si ottengono subito riunendo insieme quelle dei due gruppi dati, e aventi i medesimi valori per i parametri; giacchè se considero le solite formole canoniche per ciascuno dei due gruppi, e in esse al posto delle X_k e Υ_k rispettivamente, pongo le Z_k, esse restano inalterate, perchè l'effetto delle Z su di una funzione di sole x è lo stesso di quello delle X, e quello su di una funzione di sole y è lo stesso di quello delle Υ; ma intanto con tale sostituzione si è venuto evidentemente a formare il gruppo formato dalle Z.

Avendo supposto che le X sono assolutamente indipendenti, la matrice dei coefficienti delle X, cioè la solita matrice delle ξ, deve essere diversa da zero; ora chiamando ζ i coefficienti delle Z, si riconosce subito che per ogni Z, le prime n delle

ζ sono eguali alle ξ, e quindi la matrice delle ζ contiene quella delle ξ, e perciò evidentemente anch'essa è diversa da zero. Di qui si deduce ancora che le Z devono essere anch'esse assolutamente indipendenti.

Consideriamo ora il sistema di equazioni a derivate parziali:

$$Z_k F = 0; \tag{11}$$

in forza delle (16), esso è un sistema completo, ed è irreducibile perchè le Z sono assolutamente indipendenti. Esso ammetterà dunque $2n - r$ soluzioni comuni.

È chiaro che $n - r$ di queste sono precisamente le soluzioni del sistema completo irreducibile $X_k F = 0$, che sono funzioni di sole x; e altre $n - r$ sono le soluzioni comuni del sistema completo irreducibile $Y_k F = 0$, che sono funzioni di sole y. Le altre $2n - r - (n - r) - (n - r) = r$ soluzioni del sistema (11), e indipendenti dalle precedenti, devono essere funzioni delle x e delle y, perchè se una di esse fosse funzione p. es. di sole x, dovrebbe essere soluzione di $X_k F = 0$, e quindi non sarebbe indipendente dagli integrali già trovati. Sieno:

$$\left.\begin{matrix} u_1(x), \ldots\ldots u_{n-r}(x) \\ v_1(y), \ldots\ldots v_{n-r}(y) \\ w_1(x, y) \ldots\ldots w_r(x, y), \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

tutti gli integrali indipendenti del sistema (11).

Si può far vedere che le u e le w devono essere indipendenti fra loro considerate come fun-

zioni delle x, cioè il loro determinante funzionale rispetto alle x deve essere diverso da zero; e similmente deve essere diverso da zero il determinante funzionale rispetto alle y delle v e w.

In effetti essendo le u, v, w integrali indipendenti del sistema (11), la matrice funzionale:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{n-r}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_{n-r}}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial v_{n-r}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_{n-r}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} & \frac{\partial w_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial w_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_r}{\partial x_n} & \frac{\partial w_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial w_r}{\partial y_n} \end{array} \right\|, \qquad (13)$$

deve essere diversa da zero. Se fosse zero il determinante funzionale:

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-r}\, w_1 \ldots w_r)}{\partial (x_1\, x_2 \ldots x_n)}, \qquad (14)$$

dovrebbero aversi, per qualunque k, delle relazioni identiche del tipo:

$$\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n-r} U_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \qquad (15)$$

dove le W_i U_j sono delle funzioni delle x e y; di qui, moltiplicando per ξ_{sk} (supposto che questi sieno i coefficienti che compaiono in X_s) e sommando rispetto a k da 1 ad n, si avrebbe:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \xi_{sk} W_i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} &= -\sum_{j=1}^{n-r} U_j \sum_{k=1}^{n} \xi_{sk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ &= -\sum_{j=1}^{n-r} U_j (X_s u_j) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Intanto essendo le w integrali delle equazioni (11), si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{sk} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} = 0,$$

(essendo le η_{sk} i coefficienti che compaiono in Y_s), donde, moltiplicando per W_i e sommando da $i = 1$ ad $i = r$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \xi_{sk} W_i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \left(\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \right) = 0,$$

che, per effetto di (16), si riduce a:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \left(\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \right) = 0, \qquad (17)$$

ed essendo le v integrali delle $Y_s f = 0$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \frac{\partial v_j}{\partial y_k} = 0 \qquad (j = 1, \ldots n - r) \qquad (18)$$

e le (17) (18) valgono per qualunque valore di $s=1, 2, \ldots r$. Ne viene che le $n-r+1$ equazioni lineari con n incognite ottenute da (17) (18) ponendo delle indeterminate η_k in luogo di η_{sk}, ammetterebbero r sistemi di soluzioni per le η, e quindi esse non potrebbero essere tutte indipendenti; ma quelle ottenute solo dalle (18) sono indipendenti perchè, essendo le $v_1 \ldots v_{n-r}$ integrali indipendenti del sistema $Y_s f=0$, la matrice funzionale delle v rispetto alle y non può essere zero, dunque la sola equazione ricavata da (17) dovrebbe essere una conseguenza lineare di quelle ricavate dalle (18), cioè dovrebbe aversi, per qualunque k:

$$\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{n-r} V_j \frac{\partial v_j}{\partial y_k} = 0, \qquad (19)$$

e queste, insieme alle (14), mostrano che la matrice (13) sarebbe identicamente zero, contro l'ipotesi.

Torniamo ora alla dimostrazione principale.

Dai risultati del § 2 del Cap. II, si deduce che se noi vogliamo un sistema di n equazioni che resti invariato per tutte le trasformazioni del gruppo generato dalle Z, cioè che resti invariato passando dalle x alle x' con una trasformazione del primo gruppo dato, e dalle y alle y' colla trasformazione del secondo gruppo dato, in cui i parametri abbiano i medesimi valori che nella prima (e che noi vogliamo da ora considerare *corrispondente* alla prima), è necessario e basta eguagliare a zero n funzioni degli integrali (12).

Ora se noi mostriamo che si possono scegliere n siffatte funzioni degli integrali (12), che le e-

quazioni che risultano eguagliandole a zero sieno risolubili sia rispetto alle x che rispetto alle y, e rappresentino uua trasformazione delle x nelle y, per cui le trasformazioni infinitesimali X si riducano esattamente alle Y, avremo allora dimostrato il nostro assunto, avendo provato l'esistenza di una trasformazione che riduce il primo gruppo al secondo. Costruiamo le seguenti n funzioni delle (12) ed eguagliamole a zero:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 - \Phi_1 (u_1 \ldots u_{n-r}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-r} - \Phi_{n-r} (u_1 \ldots u_{n-r}) = 0 \\ w_1 - \Psi_1 (u_1 \ldots u_{n-r}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_r - \Psi_r (u_1 \ldots u_{n-r}) = 0, \end{array}\right\} \quad (20)$$

dove le Φ rappresentano delle funzioni indipendenti, ma del resto qualunque, dei loro argomenti, e le Ψ rappresentano funzioni anch'esse qualunque.

Il sistema di equazioni (20) sarà certamente risolubile sia rispetto alle x che rispetto alle y, giacchè, come abbiamo già detto, il determinante funzionale delle v e w, rispetto alle y, è diverso da zero, e d'altra parte esso non è altro che il determinante funzionale rispetto alle y dei primi membri delle (20); e così similmente risolvendo le prime $n - r$ delle suddette equazioni, rispetto alle $u_1 \ldots u_{n-r}$ (risoluzione che può farsi per la ipotesi fatta sulle funzioni Φ), si può ottenere un sistema di equazioni identico al suddetto, in cui si sia fatto solo lo scambio delle u con le v, e che, per una ragione analoga a quella suindicata. sarà risolubile rispetto alle x.

D'altra parte se noi vogliamo un sistema di equazioni, ottenuto eguagliando a zero n funzioni delle (12), e che sia risolubile sia rispetto alle x che alle y, esso non potrà essere che della forma suindicata; giacchè supposto esistente un tale sistema risoluto rispetto alle y, sostituendo i valori di queste in ciascuno degli integrali $v_1 \ldots v_{n-r}$ e $w_1 \ldots w_r$, dovrà aversi un integrale funzione delle sole x, e quindi funzione delle $u_1 \ldots u_{n-r}$; perciò dal supposto sistema se ne otterrebbe, come equivalente, uno della forma (20).

Resta a provare che la trasformazione, delle x nelle y, rappresentata dalle (20), muta le X nelle Y. Ora ciò risulta dalla seguente considerazione: le (20) rappresentano un sistema di equazioni invarianti rispetto al gruppo delle Z, e quindi se da esse si ricava in qualunque modo un'altra qualsiasi equazione, dovrà essere sempre zero, tenuto conto delle (20), il risultato dell'operazione di Z sul primo membro di tale equazione. Risolviamo pertanto le (20) rispetto alle y, ottenendo:

$$y_i - F_i(x) = 0; \qquad (21)$$

dovrà allora aversi:

$$Z_k(y_i - F_i(x)) = 0,$$

cioè:

$$Y_k y_i - X_k F_i(x) = 0.$$

Ma trasformando le X nelle variabili y mediante le (21), si ha:

$$X_k = \sum_{i=1}^{r} X_k F_i(x) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

ed è:

$$Y_k = \sum_{i=1}^{r} Y_k y_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

dunque:

$$X_k = Y_k,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

Dalla dimostrazione del teorema risulta ancora *in che modo si può ottenere la più generale trasformazione che muti le X nelle Y.*

Un caso particolare del precedente teorema è notevole, ed è quello in cui le parentesi $(X_h X_k)$ sono tutte eguali a zero, il che si ha quando tutte le trasformazioni infinitesimali del gruppo sono eccezionali (v. Cap. II, § 8). Se noi consideriamo il gruppo generato dalle trasformazioni infinitesimali:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \; \ldots \ldots \; Y_r = \frac{\partial}{\partial y_r},$$

e di cui quindi le formole di trasformazione sono semplicemente:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + \mu_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_r &= y_r + \mu_r \\ y'_{r+1} &= y_{r+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n &= y_n, \end{aligned} \qquad \text{(gruppo delle traslazioni)}$$

evidentemente questo gruppo è isomorfo al dato, e le Y sono assolutamente indipendenti; perciò ammesso che le X sieno assolutamente indipendenti, si può applicare il teorema e si ha:

Un gruppo di cui tutte le r ($r \leqq n$) trasformazioni infinitesimali sono eccezionali, ed assolutamente indipendenti fra loro, è simile ad un gruppo di traslazioni.

Se noi supponiamo che r sia eguale ad n, e che i due gruppi, supposto isomorfi, sieno semplicemente transitivi, allora le n trasformazioni infinitesimali di ciascuno di essi sono certamente assolutamente indipendenti (v. § 1) e quindi possiamo dire: *Due gruppi isomorfi oloedricamente, nello stesso numero di variabili, e semplicemente transitivi, sono sempre simili.*

CAPITOLO IV.

Gruppi aggregati ad un dato.

In questa parte intendiamo di raccogliere tutte le proprietà principali di certi gruppi i quali restano determinati in vario modo dato che sia un gruppo fondamentale. Siffatti gruppi, che noi vogliamo chiamare *aggregati al dato*, sono formati secondo vari punti di vista; essi sono: 1° il cosidetto *gruppo aggiunto;* 2° il *gruppo di struttura;* 3° il cosidetto *gruppo parametrico;* 4° il *gruppo isomorfo ad un gruppo imprimitivo*, e di cui gli elementi sono le varietà in cui si divide lo spazio per quel determinato sistema di imprimitività; 5° i cosidetti *gruppi ampliati;* 6° *i gruppi reciproci dei gruppi semplicemente transitivi ad n parametri essenziali.*

§ 1. Gruppo aggiunto.

Nel § 7 del Cap. II, studiando l'intransitività rispetto ad un gruppo, di un sistema di trasformazioni infinitesime, abbiamo dimostrato che il sistema delle trasformazioni infinitesime $X_1 \dots X_r$,

appartenenti ad un gruppo ad r parametri essenziali, è invariante rispetto al gruppo stesso.

Se quindi è:

$$x'_i = f_i(x, a), \qquad (1)$$

una trasformazione del gruppo, e se indichiamo con $X_1' \dots X'_r$ le X *scritte* nelle variabili x', si otterrà sempre, qualunque sia la (1):

$$\sum_{s=1}^{r} e_s X_s = \sum_{s=1}^{r} e'_s X'_s, \qquad (2)$$

dove le e e e' sono costanti, e le e' si esprimono in funzione lineare omogenea delle e, con coefficienti che dipendono solamente dai parametri della trasformazione, cioè si hanno le formole:

$$e'_j = \sum_{s=1}^{r} \rho_{js}(a_1 \dots a_r) e_s. \qquad (3)$$

Variando le $a_1 \dots a_r$, varieranno le ρ_{js}; ora si può far vedere che *le trasformazioni* (3), *in cui per variabili si considerano le e, formano un gruppo.*

Giacchè per effetto della trasformazione:

$$x''_i = f_i(x', b),$$

si dovrà avere similmente:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{r} e'_s X'_s &= \sum_{s=1}^{r} e''_s X''_s \\ e''_j &= \sum_{s=1}^{r} \rho_{js}(b_1 \dots b_r) e'_s, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ed operando la trasformazione prodotto delle due, i cui parametri al solito li indichiamo con $c_1 \dots c_r$ (v. Cap. I, § 2) si avrà similmente:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^{r} e''_s X''_s &= \sum_{s=1}^{r} e_s X_s \\ e''_j &= \sum_{s=1}^{r} \rho_{js}(c_1 \dots c_r) e_s , \end{aligned} \right\} \qquad (5)$$

e quindi deve essere:

$$e''_j = \sum_{s=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{r} \rho_{js}(b_1 \dots b_r) \rho_{s\nu}(a_1 \dots a_r) e_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \rho_{j\nu}(c_1 \dots c_r) e_\nu ,$$

donde:

$$\rho_{j\nu}(c_1 \dots c_r) = \sum_{s=1}^{r} \rho_{js}(b_1 \dots b_r) \rho_{s\nu}(a_1 \dots a_r). \quad (6)$$

Il secondo membro della formola (6) rappresenta il coefficiente generale delle formole lineari omogenee che si hanno facendo il prodotto delle due trasformazioni (4) e (3), e l'identità (6) ci dice appunto che tal coefficiente generale è il valore di un ρ quando si mutano i valori dei parametri; ciò prova che le (3) formano un gruppo.

Ogni trasformazione (3) corrisponde ad una trasformazione (1) del gruppo dato; l'identità (6) ci dice che i parametri della trasformazione prodotto di due come le (3), sono le c, cioè sono esattamente quelli della trasformazione prodotto delle due del gruppo dato. Dunque possiamo dire

che le trasformazioni (3) corrispondono, una ad una, alle trasformazioni (1), in maniera che al prodotto di due delle (1) corrisponda il prodotto di due delle (3).

Il gruppo dato dalle formole (3) si dice *gruppo aggiunto al dato*, ed esso è evidentemente, un gruppo lineare omogeneo (v. Cap. I, § 2).

Poichè il gruppo dato possiede la trasformazione identica, è evidente che vi saranno valori dei parametri a, per i quali le e' risultano identicamente eguali alle e, cioè *il gruppo aggiunto di un dato gruppo contiene la trasformazione identica.*

Vogliamo ora trovare le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto. Dobbiamo richiamare le considerazioni contenute nel Cap. II, § 7. Ivi si è visto che perchè $Y_1 \dots Y_q$ rappresentino un sistema di trasformazioni infinitesime, invariante rispetto al gruppo generato dalle X, deve essere e basta che sia:

$$(X\,Y_j) = \sum_{\nu=1}^{q} g_{j\nu}\, Y_\nu\,, \tag{7}$$

dove le g sono costanti; posto poi inoltre:

$$\sum_{s=1}^{q} c_s\, Y_s = \sum_{s=1}^{q} c'_s\, Y'_s\,, \tag{8}$$

e:

$$c'_j = \sum_{s=1}^{q} \rho_{js}\, c_s\,, \tag{9}$$

le ρ sono determinate dalle equazioni differenziali:

$$\frac{d\rho_{\nu s}}{dt} + \sum_{j=1}^{q} g_{j\nu}\,\rho_{js} = 0. \tag{10}$$

Per applicare questo risultato al nostro caso, in cui il sistema delle $X_1 \ldots X_r$ è invariante per ogni gruppo generato da:

$$X = \lambda_1 X_1 + \ldots\ldots + \lambda_r X_r\,, \tag{11}$$

le λ essendo al solito delle qualunque costanti, non c'è che porre:

$$q = r, \quad Y_j = X_j\,, \quad c_s = e_s\,, \quad c'_s = e'_s\,,$$

e X eguale al secondo membro della (11). Si ottiene allora:

$$(X X_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\,(X_i X_j) = \sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, c_{ij\nu}\right) X_\nu, \tag{12}$$

e quindi risultano i valori delle g:

$$g_{j\nu} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, c_{ij\nu}\,, \tag{13}$$

che, sostituiti nelle (10), danno le equazioni differenziali cui soddisfano le ρ:

$$\frac{d\rho_{\nu s}}{dt} + \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, c_{ij\nu}\right)\rho_{js} = 0. \tag{14}$$

Se ora moltiplichiamo le (14) per e_s, sommiamo rispetto ad s, da 1 ad r, e teniamo conto delle (9) nelle quali si sieno mutate le c nelle e, otte-

niamo:

$$\frac{d e'_r}{d t} = - \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_{ijr} \right) e'_j = 0,$$

cioè:

$$\frac{d e'_r}{d t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{r} c_{ijr} e'_j \right) = 0, \qquad (15)$$

e queste sono le equazioni differenziali cui soddisfano le variabili e' relative al gruppo aggiunto. Queste equazioni sono del medesimo tipo di quelle (6) considerate nel Cap. I, § 12, pag. 105; propriamente le funzioni $\xi_{jh}(x')$ che figurano nelle suddette equazioni (6), sono, nel nostro caso, tenuto conto del cangiamento delle x' nelle e', eguali semplicemente alle $- \sum_{j=1}^{r} c_{ijr} e'_j$.

Ora le funzioni ξ_{jh}, scritte nelle x, delle suddette formole (6) sono i coefficienti delle trasformazioni infinitesimali X_j appartenenti al gruppo definito da quelle equazioni differenziali; dunque i coefficienti delle trasformazioni infinitesimali, che chiameremo E_i, del gruppo aggiunto, sono eguali a $- \sum_{j=1}^{r} c_{ijr} e_j$, cioè possiamo scrivere:

$$E_i = - \sum_{r=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{ijr} e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_r} \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

e, ricordando che le c mutano di segno scambiando fra loro i primi due indici, si può scrivere:

$$E_i = \sum_{r=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jir} e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_r}, \qquad (16)$$

e queste sono le richieste trasformazioni infinitesime.

Col metodo seguito, abbiamo trovato così r trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto, ma non risulta però che queste r sieno tutte indipendenti; poichè il gruppo aggiunto, dipende anche, come il dato, da r parametri, è evidente che di trasformazioni infinitesimali E indipendenti, non ve ne possono essere più di r; potrebbe però avvenire che ve ne fossero un numero minore; in tal caso il gruppo aggiunto avrebbe un numero minore di r, di parametri essenziali.

In ogni caso le r trasformazioni E trovate, sono atte a mostrarci una proprietà fondamentale del gruppo aggiunto, ed è che il *gruppo aggiunto è isomorfo col dato;* l'isomorfismo sarà poi naturalmente oloedrico o meriedrico, secondochè le E saranno, o no, indipendenti. Per riconoscere questa proprietà, non c'è che eseguire il calcolo delle parentesi formate con due E.

Avendosi:

$$E_h = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jhi}\, e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_i}$$

$$E_k = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jki}\, e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_i},$$

si ha:

$$(E_h E_k) = \sum_{i=1}^{r} \left[E_h \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jki}\, e_j \right) - \right.$$

$$\left. - E_k \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jhi}\, e_j \right) \right] \frac{\partial}{\partial e_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jhs} e_j \right) c_{ski} - \sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jks} e_j \right) c_{shi} \right] \frac{\partial}{\partial e_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \left(c_{jhs} c_{ski} - c_{jks} c_{shi} \right) e_j \frac{\partial}{\partial e_i},$$

e tenendo conto che le c mutano di segno scambiando i due primi indici (v. Cap. I, § 15), la precedente espressione può scriversi:

$$(E_h E_k) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{s=1}^{r} \left(c_{jhs} c_{ski} + c_{kjs} c_{shi} \right) \right\} e_j \frac{\partial}{\partial e_i}.$$

Ora in forza delle relazioni esistenti fra le c, e propriamente in forza della (3) del Cap. I, § 15, il precedente sommatorio rispetto ad s, non è altro che:

$$- \sum_{s=1}^{r} c_{hks} c_{sji} \quad \text{cioè} \quad \sum_{s=1}^{r} c_{hks} c_{jsi},$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} (E_h E_k) &= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jsi} e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_i} = \\ &= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} E_s , \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

e questa relazione dimostra l'isomorfismo dei due gruppi (v. Cap. III, § 3).

Esaminando la costruzione delle E, si vede che i loro coefficienti restano inalterati, se restano inalterate le c_{jiv}, quindi ricaviamo subito quest'altro risultato:

Due gruppi ad r parametri essenziali, per i quali il sistema dei numeri c è il medesimo, cioè che sono oloedricamente isomorfi, hanno il medesimo gruppo aggiunto.

Una questione importante che ora si presenta, è quella di esaminare qual'è la condizione necessaria e sufficiente perchè le E sieno indipendenti.
Supponiamo esistente una relazione lineare a coefficienti costanti fra le E:

$$0=\sum_{i=1}^{r}\gamma_i E_i=\sum_{\nu=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{r}e_j\sum_{i=1}^{r}\gamma_i c_{ji\nu}\right]\frac{\partial}{\partial e_\nu} \quad (18)$$

Le espressioni contenute nella parentesi quadra dovranno essere separatamente zero, e quindi si deduce un sistema di equazioni lineari, omogenee fra le e; essendo poi le e indipendenti, se ne ricava necessariamente l'annullarsi dei singoli coefficienti, cioè:

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i c_{ji\nu}=0. \quad (19)$$

Onde formando la espressione:

$$\left(X_j,\sum_{i=1}^{r}\gamma_i X_i\right)=\sum_{\nu=1}^{r}\left[\sum_{i=1}^{r}\gamma_i c_{ji\nu}\right]X_\nu, \quad (20)$$

si vede che il secondo membro è identicamente zero, cioè che la trasformazione infinitesimale:

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i X_i, \quad (21)$$

combinata in parentesi, col solito simbolo, con qualunque trasformazione infinitesima del gruppo stesso, dà sempre per risultato zero; essa è perciò una di quelle chiamate *eccezionali* (v. Cap. II, § 8); *se dunque fra le E esiste una relazione lineare a coefficienti costanti, esisterà corrispondentemente una trasformazione infinitesima eccezionale del gruppo.*

D' altra parte esista una trasformazione infinitesima eccezionale, e sia quella data da (21); il secondo membro di (20) sarà zero, quindi sussisteranno le (19) e perciò le (18), e fra le E sussisterà una relazione lineare a coefficienti costanti. Di queste ne esisteranno dunque tante indipendenti e solo tante, quante sono le trasformazioni infinitesime eccezionali, indipendenti, appartenenti al gruppo; possiamo perciò dire:

Se il gruppo dato non contiene trasformazioni infinitesime eccezionali, il suo gruppo aggiunto dipende da r parametri essenziali, e se invece nel gruppo dato esistono ν trasformazioni infinitesime eccezionali, indipendenti, il gruppo aggiunto dipenderà da $r - \nu$ parametri essenziali.

Per modo che, se tutte le trasformazioni infinitesime del gruppo sono eccezionali, cioè, se tutte le trasformazioni finite del gruppo sono due a due permutabili, (v. Cap. II, § 8), allora il gruppo aggiunto si riduce alla sola trasformazione identica.

Se il gruppo dato contiene una trasformazione infinitesima eccezionale, esso è certamente imprimitivo (v. Cap. III, § 2), e quindi si deduce che:

Il gruppo aggiunto di un gruppo primitivo non può avere meno di r parametri essenziali; esso ne ha perciò esattamente r.

§ 2. Gruppo di struttura.

Abbiamo già detto a suo luogo, che cosa si intende per *struttura* di un gruppo ad r parametri essenziali (v. Cap. I, § 14). Il secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi, ci dice che la condizione necessaria e sufficiente perchè r trasformazioni infinitesimali indipendenti $X_1 \ldots X_r$, possano generare un gruppo ad r parametri essenziali, è che le parentesi $(X_i X_j)$ sieno esprimibili come combinazioni lineari, a coefficienti costanti c_{ijs}, mediante le X stesse; la totalità dei numeri c_{ijs} dicesi struttura del gruppo, ed ha col gruppo stesso un rapporto molto intimo; e le proprietà del gruppo dipendono sostanzialmente dalla natura di questi numeri. Per convincersi di ciò, basta p. es., tener presente tutto ciò che abbiamo detto in quanto all'isomorfismo fra due gruppi, laddove i numeri c_{ijs} hanno una funzione fondamentale; si può poi ricordare anche tutto ciò che si è detto sui sottogruppi invarianti di un dato e sulle trasformazioni infinitesime eccezionali, contenute in un gruppo; così p. es., se sono eguali a zero tutte le c_{ijs}, delle quali il primo indice è fisso, ed il secondo e terzo sono variabili, se ne deduce immediatamente che la trasformazione infinitesima X_i è eccezionale, e che quindi tutte le trasformazioni finite del gruppo ad un sol parametro, generato da X_i, sono permutabili con

quelle del gruppo; se invece sono zero tutte le c in cui il primo indice è sempre i, meno però quelle in cui il terzo indice è eguale anch' esso ad i, allora per un teorema del Cap. II, § 8, si deduce che il sottogruppo generato da X_i è invariante rispetto al gruppo; se poi tutte le c sono zero, allora le trasformazioni finite del gruppo sono a due a due permutabili, il gruppo aggiunto si riduce all' unica trasformazione identica (v. Cap. IV, § 1), ecc.; inoltre nei medesimi anzidetti casi possiamo sempre conchiudere che il gruppo dato è imprimitivo (v. Cap. III, § 2), ecc., ecc.

Fra i numeri c esistono delle relazioni da noi già trovate nel Cap. I, § 14 e che sono:

$$\left.\begin{aligned} c_{jis} + c_{ijs} = 0 \\ \sum_{s=1}^{r} (c_{jis} c_{skt} + c_{iks} c_{sjt} + c_{kjs} c_{sit}) = 0; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

però assegnato il gruppo, il sistema dei numeri c, non è, come già sappiamo, determinato in modo unico, ma bensì possono trovarsi infiniti diversi sistemi di numeri c, i quali corrispondono tutti al medesimo gruppo; non però diremo naturalmente che ad ognuno di tali sistemi corrisponde una *struttura* diversa, ma per struttura intenderemo la totalità di tutti questi sistemi.

Viene perciò spontanea la ricerca dei rapporti esistenti fra tutti questi infiniti sistemi di numeri c. Noi faremo vedere che *il passaggio da un sistema ad un altro di numeri c_{ijs} si opera con trasformazioni lineari, le quali formano un gruppo,* che vogliamo chiamare *gruppo di struttura* e

le cui proprietà devono essere, naturalmente, intimamente legate con quelle del gruppo dato.

Si abbia un sistema di r trasformazioni infinitesimali indipendenti del gruppo dato $X_1 \dots X_r$, e ad esso corrisponda un sistema di numeri c, dati da:

$$(X_i\, X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs}\, X_s\,; \qquad (2)$$

si abbia ora un altro sistema di r trasformazioni infinitesime $Y_1 \dots Y_r$ indipendenti del medesimo gruppo; ciascuna di queste sarà una combinazione lineare a coefficienti costanti delle X:

$$Y_k = \sum_{i=1}^{r} h_{ki}\, X_i\,, \qquad (3)$$

dove il determinante delle h è diverso da zero; quindi:

$$(Y_k\, Y_l) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_{ki}\, h_{lj}\, (X_i\, X_j). \qquad (4)$$

Ma il sistema dei numeri c corrispondenti alle Y, e che noi chiameremo c'_{kls} è dato da:

$$\left.\begin{aligned}(Y_k\, Y_l) &= \sum_{\sigma=1}^{r} c'_{kl\sigma} Y_\sigma \\ &= \sum_{s=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} c'_{kls}\, h_{\sigma s}\, X_s\,,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

del paragone dunque con (4) e con (2), otterremo le formole di trasformazione delle c nelle c', cioè:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c'_{kl\sigma}\, h_{\sigma s} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_{ki}\, h_{lj}\, c_{ijs} \quad (s = 1, \dots r). \quad (6)$$

Essendo diverso da zero il determinante delle h, queste equazioni possono risolversi rispetto alle c', le quali restano espresse così linearmente per mezzo delle c. Facendo variare le h in tutti i modi possibili, sempre però naturalmente in maniera che il loro determinante sia diverso da zero, le (6) esprimono infinite trasformazioni delle c nelle c'; possiamo dimostrare che *queste trasformazioni formano un gruppo.*

In effetti mutando i valori dei parametri h, e chiamando h' i nuovi valori, e intendendo che con questi si passi dai valori c' ai valori c'', possiamo scrivere le formole:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} h'_{\sigma s} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h'_{ki} h'_{lj} c'_{ijs} \quad (s = 1 \ldots r) \quad (7)$$

Eliminiamo fra le (6) e le (7) le c', per cercare le formole con le quali le c'' si esprimono mediante le c, cioè le formole della trasformazione prodotto delle due precedenti. Moltiplicando le (7) per $h_{s\tau}$ e sommando rispetto a s, da 1 ad r, si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} \left(\sum_{s=1}^{r} h_{s\tau} h'_{\sigma s} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h'_{ki} h'_{lj} \sum_{s=1}^{r} c'_{ijs} h_{s\tau}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

e tenendo conto della (6), dal secondo membro di questa espressione si possono eliminare le c' e

resta:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma}\left(\sum_{s=1}^{r} h'_{\sigma s} h_{s\tau}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h'_{ki} h'_{lj} \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} h_{ip} h_{jq} c_{pq\tau}$$

$$= \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} h'_{ki} h_{ip}\right)\left(\sum_{j=1}^{r} h'_{lj} h_{jq}\right) c_{pq\tau}.$$

Ponendo quindi in generale:

$$h''_{\sigma\tau} = \sum_{s=1}^{r} h'_{\sigma s} h_{s\tau}, \tag{9}$$

la precedente formola si riduce semplicemente a:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} h''_{\sigma\tau} = \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} h''_{kp} h''_{lq} c_{pq\tau}, \tag{10}$$

la quale è dello stesso tipo della (6), e prova che effettivamente le (6) formano un gruppo; i parametri della trasformazione prodotto si esprimono mediante quelli dei due fattori con le formole (9), dalle quali appare anche che il determinante delle h'' è eguale al prodotto dei due determinanti di h e h', e quindi, come era da aspettarsi, è diverso da zero, quando lo è ciascuno degli altri due.

Poichè le c' devono soddisfare ancora esse a relazioni come le (1), ne risulta che *per le trasformazioni del gruppo di struttura, il sistema delle equazioni* (1) *è invariante.*

Se noi fra le c consideriamo solamente quelle in cui il primo indice è minore del secondo, trascurando le altre, le quali del resto, in forza della prima

delle (1) devono essere eguali e di segno contrario a queste già considerate, il numero delle c ascende allora a $\frac{r^2(r-1)}{2}$, legate da un certo numero di relazioni bilineari, cioè dalle seconde (1). Considerando le suddette c, come coordinate in uno spazio a $\frac{r^2(r-1)}{2}$ dimensioni, il gruppo di struttura rappresenta in tale spazio un gruppo di collineazioni per le quali resta inalterato un certo sistema di ipersuperficie di secondo ordine. Se invece consideriamo tutte le r^3 c come coordinate di uno spazio ad r^3 dimensioni, le equazioni (1) determineranno in tale spazio una certa varietà, la quale resta invariata per tutte le trasformazioni del gruppo di struttura; ogni punto di tale varietà corrisponde ad un sistema di numeri c capace di rappresentare la struttura di un gruppo ad r parametri essenziali.

§ 3. Gruppo parametrico.

Noi abbiamo già visto sin dal principio, che dato un gruppo e assegnate di esso due trasformazioni, di parametri rispettivamente $a_1 \ldots a_r$, $b_1 \ldots b_r$, i parametri $c_1 \ldots c_r$ della trasformazione prodotto si esprimono come funzioni φ delle a e delle b:

$$c_k = \varphi_k(a, b). \tag{1}$$

Di queste funzioni φ abbiamo indicato alcune proprietà generali; per es., abbiamo detto che esse devono essere risolubili sia rispetto alle a, che rispetto alle b. Ora vogliamo approfondire lo studio delle medesime funzioni, e ciò faremo servendoci di una ingegnosa considerazione riguardante la cosidetta *proprietà associativa* cui devono soddisfare le trasformazioni (v. Cap. I, § 1).

Sieno date tre trasformazioni, una coi parametri a, l'altra coi parametri α, e la terza coi parametri β.

In forza della proprietà associativa, moltiplicando fra loro prima le prime due, e poi il prodotto moltiplicandolo a sua volta con la terza, e moltiplicando invece la prima col prodotto della seconda e terza, si deve avere il medesimo risultato. Ora vediamo a quale proprietà delle funzioni φ ciò conduce.

Il prodotto delle due prime ha per parametri:

$$\varphi_1(a, \alpha), \ldots\ldots \varphi_r(a, \alpha),$$

e il prodotto di questo prodotto con la terza ha per parametri:

$$\varphi_1(\varphi(a, \alpha), \beta), \ldots\ldots \varphi_r(\varphi(a, \alpha), \beta). \tag{2}$$

Invece il prodotto totale fatto nell'altro modo, dianzi indicato, avrà per parametri:

$$\varphi_1(a, \varphi(\alpha, \beta)), \ldots\ldots \varphi_r(a, \varphi(\alpha, \beta)), \tag{3}$$

i quali perciò devono essere eguali ai precedenti, cioè deve aversi identicamente:

$$\varphi_k(\varphi(a, \alpha), \beta) = \varphi_k(a, \varphi(\alpha, \beta)). \tag{4}$$

Ora consideriamo le a come delle variabili, le quali si trasformino nelle variabili a' colle formole:

$$a'_k = \varphi_k(a, \alpha), \tag{5}$$

in cui le α fanno l'ufficio di parametri che possono ricevere anche i valori β. *Le formole* (5) *sono quelle di un gruppo*, che noi chiameremo il *gruppo parametrico*, e che è evidentemente determinato del dato. In effetti il prodotto della (5) per:

$$a''_k = \varphi_k(a', \beta),$$

è eguale a:

$$a''_k = \varphi_k(\varphi(a, \alpha), \beta),$$

che, per effetto della (4), è:

$$a''_k = \varphi_k(a, \varphi(\alpha, \beta)),$$

cioè è un'altra delle trasformazioni comprese nella formola (5), salvo il cangiamento del parametro α nel parametro $\varphi(\alpha, \beta)$; con ciò è dimostrato l'assunto, e risulta poi ancora che *il parametro del prodotto* si esprime mediante i parametri dei fattori colle medesime funzioni φ che nel gruppo dato, il che mostra *che il gruppo parametrico di un dato è parametrico di sè stesso.*

Sapendo che le equazioni (1) sono risolubili rispetto alle b, lo stesso si avrà per le (5) rispetto alle α, cioè *il gruppo parametrico di un dato, è, come questo, ad r parametri essenziali, ed è semplicemente transitivo.*

È facile vedere che *il gruppo parametrico contiene la trasformazione identica, se il gruppo dato la contiene.*

Infatti se il gruppo dato contiene la trasformazione identica, vi saranno dei valori delle b, per i quali nella formola (1) le c diventano identicamente eguali alle a; è evidente allora che, posti nella (5) per le α tali valori delle b, le a' diventeranno rispettivamente eguali alle a, il che dimostra l'assunto.

Supponiamo ora che il gruppo dato sia generato da r trasformazioni infinitesimali indipendenti $X_1 \dots X_r$; si può far vedere che anche il gruppo parametrico sarà generato da altre r trasformazioni infinitesimali indipendenti, che chiameremo $A_1 \dots A_r$, e che sono rappresentate dalle medesime formole che le omonime introdotte e considerate nel Cap. I, § 14 (*formole* (5) pag. 117), cioè:

$$A_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial}{\partial a_k}, \tag{6}$$

avendo le α_{jk} il solito significato dato loro nel Cap. I, § 4.

Le formole di trasformazione del gruppo parametrico, cioè le (5), poichè queste formano un gruppo, devono naturalmente soddisfare alle equazioni differenziali caratteristiche, da noi già considerate nel Cap. I, § 4, cioè a equazioni del tipo delle (A) del luogo citato. Riferendoci dunque a quanto abbiamo ivi trovato, possiamo dire che do-

vranno sussistere delle equazioni come le seguenti:

$$\frac{\partial a'_h}{\partial \alpha_k} = \sum_{j=1}^{r} \overline{\alpha}_{jh}(a') \overline{\psi}_{jk}(\alpha), \qquad (7)$$

dove le $\overline{\alpha}_{jh}$ e le $\overline{\psi}_{jk}$ avranno rispetto a questo gruppo, lo stesso significato che le funzioni $\xi_{jh}(x')$, $\psi_{jk}(a)$ aveano per il gruppo dato.

Ora le funzioni $\psi_{jk}(a)$ non erano altro, per effetto della formola (a) del citato § 4 del Cap. I, che le derivate di b_j rispetto ad a_k, quando in luogo delle b si ponevano dei particolari valori fissi, tali derivate essendo, s'intende, ricavate, dalle equazioni $c_i = \varphi_i(a, b)$ che danno, per il gruppo dato, i parametri del prodotto di due trasformazioni espressi per i parametri dei fattori; nel nostro caso i parametri, in luogo di a e b, sono chiamati rispettivamente α e β, e le funzioni φ_i sono rimaste le stesse di prima per una proprietà dimostrata di sopra; si vede quindi che, salvo un cangiamento di nome delle variabili, le funzioni $\overline{\psi}$ di questo caso, sono le stesse che le antiche ψ.

Similmente per la formola (b) del medesimo § 4, Cap. I, le ξ_{jh} non erano altro che le Ξ quando per le b si ponevano i medesimi particolari valori fissi dianzi indicati, cioè, non erano altro che le derivate delle x' rispetto a b_j nelle quali sia fatta la indicata sostituzione.

Ma nel nostro caso le x'_h sono le a'_h, le b_j sono le β_j, e le equazioni $x''_h = f_h(x' b)$ donde bisognava allora ricavare le suddette derivate, sono le equazioni $a''_h = \varphi_h(a' \beta)$; quindi le $\overline{\alpha}_{jh}(a')$ non sono altro che le derivate delle a'_h rispetto a β_j

ricavate da queste ultime equazioni, quando poi in esse poniamo per le β dei speciali valori fissi.

Intanto se noi dalle formole solite $c_k = \varphi_k(a, b)$ ricerchiamo le derivate delle a rispetto alle b, e poi poniamo per le b dei speciali valori fissi, otteniamo evidentemente, salvo il cangiamento di nome delle variabili, i medesimi risultati che dianzi; mentre così facendo si ottengono, tenendo conto della formola (c) del § 4, Cap. I, precisamente le funzioni α_{jh}; possiamo dunque asserire che le $\overline{\alpha}_{jk}(a')$ coincidono con le $\alpha_{jk}(a')$ già considerate varie volte nel citato § 4 del Cap. I, e altrove.

Perciò le equazioni differenziali (7) del gruppo parametrico, hanno la forma:

$$\frac{\partial a'_h}{\partial \alpha_k} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jh}(a')\,\psi_{jk}(\alpha), \tag{8}$$

e perciò le trasformazioni infinitesimali del gruppo parametrico sono precisamente quelle date dalle formole (6), da noi già considerate nel § 14 del Cap. I.

Nel luogo citato abbiamo dimostrato una proprietà dei simboli A, la quale ha per noi ora una grande importanza; essa è che le parentesi formate con due delle A, danno luogo ad un sistema di numeri c_{ijs} identico a quello cui danno luogo le parentesi formate con due delle X; ora ciò corrisponde a dire che la struttura dei due gruppi, il dato e il parametrico, è la medesima; onde:

Il gruppo parametrico è oloedricamente isomorfo col dato.

Ed evidentemente possiamo allora anche dire:

Perchè due gruppi abbiano il medesimo gruppo parametrico, è necessario che essi sieno oloedricamente isomorfi.

Il gruppo parametrico di un dato non è unicamente determinato, se non quando è stabilito il modo col quale le formole di trasformazione del gruppo dipendono dai parametri; in altri termini è evidente che se pongo i parametri del gruppo eguali a delle funzioni arbitrarie indipendenti di altre r quantità che rappresentino nuovi parametri, il gruppo parametrico muta. Però è facile far vedere che specie di mutamento esso subisce.

Sieno $a_1^{(1)} \dots a_r^{(1)}$ tali nuovi parametri da introdurre in luogo delle $a_1 \dots a_r$ e si abbia:

$$a_j = \zeta_j (a_1^{(1)} \dots a_r^{(1)}); \qquad (9)$$

ai valori $\alpha_1 \dots \alpha_r$ delle a corrispondano i valori $\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_r^{(1)}$ delle $\alpha^{(1)}$; le formole di trasformazione del nuovo gruppo parametrico risulteranno allora:

$$\zeta_k (a'^{(1)}_1 \dots a'^{(1)}_r) = \varphi_k \left(\zeta (a_1^{(1)} \dots a_r^{(1)}), \zeta (\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_r^{(1)})\right),$$

e si vede che si passa dall'antico gruppo parametrico al nuovo, ponendo le a, e le α, dell'antico gruppo, eguali alle medesime funzioni ζ delle $a^{(1)}$ e delle $\alpha^{(1)}$ del nuovo gruppo; ne deduciamo perciò che *i due gruppi parametrici sono fra loro simili* (v. Cap. III, § 4).

Riunendo i risultati ottenuti nel § 14 del Capitolo I con quelli ottenuti in questo paragrafo, possiamo dire che *se sono conosciute le trasfor-*

mazioni infinitesime A del gruppo parametrico, corrispondenti una ad una nel modo solito, alle trasformazioni infinitesime X del gruppo dato, le equazioni finite di questo si otterranno integrando il sistema completo:

$$\Omega_j F = X'_j F + A_j F = 0, \qquad (10)$$

dove X' indica la X scritta nelle variabili x'; gli integrali di queste equazioni però, al solito, non sono completamente determinate in funzione delle costanti che in questo caso sono le x (v. Cap. I, § 5); *ma se noi conosciamo i valori dei parametri che corrispondono alla trasformazione identica, resta determinato il gruppo. — Viceversa il gruppo determinato nell'indicato modo dalle* (10) *ha per gruppo parametrico quello delle A e per trasformazioni infinitesime generatrici le X.*

Di ciò ci serviamo per dimostrare il seguente teorema, che è il reciproco di un altro dimostrato testè:

Se sono dati due gruppi oloedricamente isomorfi, si possono in essi mutare i parametri sempre in modo che i due gruppi riescano ad avere il medesimo gruppo parametrico.

Se $X_1 \dots X_r$ sono le trasformazioni infinitesime del primo, e si abbia:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

si potranno scegliere sempre quelle del secondo $Y_1 \dots Y_r$ in modo che sia:

$$(Y_j Y_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} Y_s ,$$

e si potranno scegliere sempre le trasformazioni infinitesime $A_1 \ldots A_r$ del gruppo parametrico del primo, in maniera che sia:

$$(A_j\, A_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis}\, A_s\,.$$

Ora io dico che nel secondo gruppo si possono mutare i parametri in modo che il suo gruppo parametrico venga ad essere precisamente quello delle A. In effetti, per quel che si è detto di sopra, se integro le equazioni del sistema completo:

$$X'_j\, F + A_j\, F = 0,$$

e stabilisco che in tali integrali le x' devono diventare eguali alle x, (che fanno l'ufficio di costanti in tali integrazioni), per i valori a^0 dei parametri a (supposto che nel gruppo dato i valori a^0 sieno quelli che corrispondono alla trasformazione identica), si ottengono le trasformazioni finite del primo gruppo. Se ora noi analogamente integriamo il sistema completo:

$$Y'_j\, F + A_j\, F = 0,$$

con la medesima condizione che le y' diventino eguali alle y, per i valori a^0 delle a, otteniamo, per quanto si è detto di sopra, un gruppo di cui il gruppo parametrico è quello delle A, e di cui le trasformazioni infinitesime generatrici sono precisamente le Y, e che perciò non può essere che il secondo gruppo dato quando vi sieno opportunamente cangiati i parametri. Con ciò il teorema è dimostrato.

Da questo teorema risulta una proprietà fondamentale di due gruppi *isomorfi oloedricamente*, ed

è che, *dati due siffatti gruppi, si possono porre i parametri dell'uno tali funzioni dei parametri dell'altro, che le funzioni* φ *(cioè quelle funzioni mediante cui i parametri del prodotto di due trasformazioni, si esprimono mediante i parametri dei due fattori), sono le medesime per ambedue i gruppi.*

Ciò porta alla dimostrazione, per il caso dell'isomorfismo oloedrico, di quella proprietà che abbiamo già dimostrato in altro modo nel Cap. III, § 3, cioè che le *trasformazioni di due gruppi isomorfi si possono far corrispondere fra loro in modo che al prodotto di due di un medesimo gruppo, corrisponde il prodotto delle corrispondenti nell'altro.*

Giacchè supponiamo di avere trasformato il secondo gruppo in modo da fare che ai due gruppi appartengano, nel modo detto di sopra, le medesime funzioni φ, e intendiamo allora come corrispondenti le trasformazioni aventi i medesimi valori dei parametri; perchè le funzioni φ sono le medesime per ambedue i gruppi, i parametri $c_k = \varphi_k(a, b)$ del prodotto di due trasformazioni del primo gruppo, saranno eguali a quelli del prodotto delle due corrispondenti del secondo gruppo, e quindi i due prodotti si corrisponderanno, il che dimostra il nostro assunto.

Si potrebbe dimostrare la stessa proprietà anche per il caso dell'isomorfismo meriedrico, ma noi non vogliamo dilungarci su ciò, ricordando specialmente che la dimostrazione data nel Cap. III, § 3, vale anche per questo altro caso.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo far vedere, seguendo gli sviluppi contenuti in una recente Nota intitolata: *Altre ricerche sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sul gruppo parametrico di un dato* (*Rend. Ist. Lomb.* (2), t. 35, 1902), come la formola del prodotto di due trasformazioni, di cui abbiamo trattato nel Cap. I, § 9, possa servire a costruire le trasformazioni infinitesime del *gruppo parametrico* di un dato, di cui sieno assegnate le trasformazioni infinitesime.

Si abbia il gruppo a r parametri, generato da r trasformazioni infinitesime:

$$Z_1 \ldots\ldots Z_r ,$$

e si formi il prodotto delle due trasformazioni:

$$\left.\begin{aligned} x''_i &= e^{X_1'}\, x'_i \\ x'_i &= e^{X_2}\, x_i , \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

dove sia:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= v_1 Z_1 + \ldots + v_r Z_r \\ X_2 &= u_1 Z_1 + \ldots + u_r Z_r , \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

le v, u essendo i parametri delle due trasformazioni, e la X' essendo la stessa X, ma scritta nelle variabili x' anzichè nelle x.

La trasformazione risultante sarà:

$$x''_i = e^{X_3} x_i , \qquad (13)$$

dove X_3 dovrà essere anche una combinazione lineare delle Z, cioè:

$$X_3 = u'_1 Z_1 + \ldots + u'_r Z_r , \qquad (14)$$

in cui le u' saranno delle funzioni delle v e u:

$$u'_h = \varphi_h(u\,;\,v). \tag{15}$$

Le formole (15) sono quelle delle trasformazioni del *gruppo parametrico*, considerandovi le u e u' come *variabili*, e le v come *parametri* della trasformazione.

Coll'aiuto delle citate ricerche possiamo determinare completamente le funzioni φ_h, e anzi per tale determinazione non occorre la conoscenza di *tutti* i coefficienti nella formola del prodotto di due trasformazioni, ma basta solo la conoscenza di alcuni di quelli che abbiamo già calcolati.

Ed in effetti a noi basterà del gruppo generato da (15) calcolare solo le trasformazioni infinitesime, e queste si ottengono immaginando le $v_1 \ldots v_r$ infinitamente piccole; perciò nel calcolo di X_3 basterà limitarsi a quei termini che contengono potenze di $v_1 \ldots v_r$ non superiori alla prima, il che viene a dire che della formola (7) del Cap. I, § 9, occorreranno solo i termini che moltiplicano la prima potenza di t, e che, come sappiamo, sono i seguenti:

$$X_1 + t'\gamma'(X_1 X_2) - t'^2\gamma''(X_2 X_1 X_2) - \ldots\ldots$$

ovvero:

$$X_1 - t'\gamma'(X_2 X_1) + \sum_{n=1}^{\infty} t'^{2n}\gamma^{(2n)}\Big(\overbrace{X_2 \ldots X_2}^{2n} X_1\Big). \tag{16}$$

Se in questa formola per X_1 e X_2 poniamo le loro espressioni nelle Z, i coefficienti di:

$$v_k Z_1,\ v_k Z_2,\ \ldots\ldots\ldots\ v_k Z_r$$

saranno i coefficienti di una trasformazione infinitesima A_k del gruppo parametrico.

Poichè le Z generano un gruppo, per il *secondo teorema di* Lie dovrà aversi:

$$(Z_t\, Z_s) = \sum_h c_{tsh}\, Z_h\,, \tag{17}$$

dove le c sono le *costanti di struttura.*

Da questa formola si ha:

$$(X_2\, X_1) = \sum_{t_1 s_1} u_{t_1} v_k (Z_{t_1} Z_k) = \sum_{t_1 k h} c_{t_1 k h}\, u_{t_1} v_k\, Z_h$$

$$(X_2\, X_2\, X_1) = \sum_{t_1 t_2 s_1 k h} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 h}\, u_{t_1} u_{t_2} v_k\, Z_h\,,$$

e in generale:

$$\left(\overbrace{X_2 \ldots X_2}^{2n} X_1\right) =$$
$$= \sum_{t_1 t_2 \ldots} \sum_{s_1 s_2 \ldots} \sum_{kh} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s_2} c_{t_3 s_2 s_3} \ldots c_{t_{2n} s_{n-1} h}\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} v_k\, Z_h\,.$$

Sostituendo nella (16), e adoperando per brevità il simbolo già introdotto in altra mia Nota (*Sul terzo teorema di Lie, etc., Rend. Ist. Lomb.*, (2), t. 35, § 1, formola (3), vedi *note in fine a questo volume*), cioè ponendo:

$$\sum_{s_1, s_2 \ldots, s_{m-1}} \ldots \sum c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s_2} c_{t_3 s_2 s_3} \ldots c_{t_m s_{m-1} h} = (t_1\, t_2 \ldots t_m;\, k\, h),$$

la trasformazione infinitesima A_k si presenta sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} A_k = \sum_h \Big[& \varepsilon_{hk} - \gamma' \sum_{t_1} (t_1\, k\, h)\, u_{t_1} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \ldots t_{2n}} (t_1 \ldots t_{2n};\, k\, h)\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} \Big] \frac{\partial}{\partial u_h}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

dove ε_{kh} è zero se k è diverso da h, ed è 1 per $= k$.

Le funzioni φ della formola (15) restano così trovate e si hanno le:

$$u'_h = u_h + \left(\sum_k v_k A_k\right) u_h + \frac{1}{2!}\left(\sum_k v_k A_k\right)^2 u_h + \ldots \quad (19)$$

per le formole di trasformazione del *gruppo parametrico.*

§ 4. Gruppo di imprimitività.

Sia dato un gruppo imprimitivo, le cui trasformazioni infinitesime sieno $X_1 \ldots X_r$, e le equazioni che danno la divisione dello spazio totale ad n dimensioni in ∞^{n-m} spazi ad m dimensioni sieno, come nel Cap. III, § 2:

$$\Omega_1(x) = c_1 \ldots\ldots \Omega_{n-m}(x) = c_{n-m}, \quad (1)$$

che sieno gli integrali del sistema completo:

$$Y_1 F = 0, \ldots\ldots Y_m F = 0. \quad (2)$$

Per le cose dette nel citato Cap. III, § 2, il sistema (2) deve essere invariante rispetto al gruppo, e quindi operando una X su di uno degli integrali (1), si deve ottenere una funzione dei primi membri di (1); si abbia allora in generale:

$$X_k \Omega_i = \gamma_{ki}(\Omega_1 \ldots\ldots \Omega_{n-m}). \quad (3)$$

Consideriamo ora le $\Omega_1 \ldots \Omega_{n-m}$ come delle variabili a sè, ed in corrispondenza con le (1), chiamiamole perciò $c_1 \ldots c_{n-m}$, e consideriamo le

seguenti trasformazioni infinitesimali nelle variabili c:

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_{ki}(c) \frac{\partial}{\partial c_i} \qquad (k = 1, \dots r) \quad (4)$$

Possiamo far vedere che *queste generano un gruppo, il quale è isomorfo col dato*, e che noi chiameremo *gruppo di imprimitività del dato*. Per dimostrare che le (4) generano un gruppo, dobbiamo, al solito, considerare il valore delle parentesi formate con due delle Γ.

Si ha:

$$\Gamma_k c_i = \gamma_{ki}(c) = X_k c_i$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k \gamma_{hi} &= \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial \gamma_{hi}}{\partial c_s} \Gamma_k c_s = \\ &= \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial \gamma_{hi}}{\partial c_s} X_k c_s = \\ &= X_k \gamma_{hi}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} (\Gamma_h \Gamma_k) &= \sum_{i=1}^{n-m} (\Gamma_h \gamma_{ki} - \Gamma_k \gamma_{hi}) \frac{\partial}{\partial c_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} (X_h \gamma_{ki} - X_k \gamma_{hi}) \frac{\partial}{\partial c_i} . \end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned} (X_h X_k) c_i &= X_h X_k c_i - X_k X_h c_i = \\ &= X_h \gamma_{ki} - X_k \gamma_{hi}, \end{aligned}$$

dunque:

$$(\Gamma_h \Gamma_k) = \sum_{i=1}^{n-m} (X_h X_k) c_i \cdot \frac{\partial}{\partial c_i} . \qquad (5)$$

Questa formola ci basta per dimostrare contemporaneamente i nostri due assunti; infatti, poichè le X formano un gruppo, si avrà:

$$(X_h X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} X_s ,$$

e quindi:

$$(X_h X_k) c_i = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} X_s c_i =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \Gamma_s c_i ,$$

e infine:

$$(\Gamma_h \Gamma_k) = \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \Gamma_s c_i \cdot \frac{\partial}{\partial c_i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_{si} \frac{\partial}{\partial c_i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \Gamma_s .$$

Fissati i valori delle $c_1 \ldots c_{n-m}$, resta determinato uno degli ∞^{n-m} spazi ad m dimensioni in cui si divide, per effetto del gruppo dato, lo spazio totale ad m dimensioni; il gruppo di imprimitività rappresenta un gruppo fra i sistemi delle c, ed esso è propriamente quello col quale, per effetto del gruppo imprimitivo dato, si scambiano fra di loro gli ∞^{n-m} spazi ad m dimensioni.

§ 5. Gruppi ampliati.

Dato un gruppo di trasformazioni, ne restano determinati degli altri fra un numero maggiore di variabili; sono i cosidetti *gruppi ampliati*, la cui teoria vogliamo ora passare brevemente ad esporre.

Sia data la trasformazione:

$$x'_i = f_i(x, a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, \ldots n), \quad (1)$$

e supponiamo di voler considerare $x_1 \ldots x_q$ $(q < n)$, come funzioni ψ di $x_{q+1}, \ldots x_n$, e similmente $x'_1 \ldots x'_q$ come funzioni ψ' di $x'_{q+1}, \ldots x'_n$. Naturalmente queste funzioni ψ' non sono arbitrarie, date che sieno le ψ, giacchè fra le x e x' sussistono le relazioni (1), e quindi le ψ' si ottengono operando la trasformazione (1) sulle $x_{q+s} = \psi_s(x_1 \ldots x_q)$, e indi risolvendo le ottenute relazioni rispetto alle $x'_1 \ldots x'_q$.

Insieme alle variabili x vogliamo ora considerare le derivate prime, che chiameremo p_{ij} $(i = 1 \ldots q;$ $j = q + 1, \ldots n)$, delle $x_1 \ldots x_q$ rispetto alle rimanenti $x_{q+1} \ldots x_n$, e insieme alle x', le analoghe p'_{ij}; si possono allora trovare facilmente delle formole che esprimono le p' mediante le p e le x, e quindi considerando il complesso di tutte le variabili:

$$x_1 \ldots x_n, \; p_{1,q+1}, \ldots p_{q,n},$$

si otterranno le formole di una trasformazione di tutto questo sistema di $n + q(n - q)$ variabili, trasformazione che sarà naturalmente di un tipo speciale.

La chiameremo *trasformazione ampliata della data*, ed essa è evidentemente indipendente della speciale natura delle funzioni ψ.

Prima di andare avanti facciamo vedere con qual mezzo si troverebbero le formole che esprimono le p' mediante le p e le x.

Derivando la (1) rispetto ad x'_j $(j = q + 1, \ldots n)$, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_{q+1}} \cdot \frac{\partial x_{q+1}}{\partial x'_j} + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x'_j}\right) + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \frac{\partial f_i}{\partial x_q}\left(\frac{\partial x_q}{\partial x_{q+1}} \cdot \frac{\partial x_{q+1}}{\partial x'_j} + \ldots + \frac{\partial x_q}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x'_j}\right) + \\
+ \frac{\partial f_i}{\partial x_{q+1}} \frac{\partial x_{q+1}}{\partial x'_j} + \\
+ \ldots\ldots + \\
+ \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x'_j}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

In questa equazione il primo membro è p'_{ij} se i è eguale $1, \ldots q$, ed è invece zero se i è eguale a $q + 1 .,. j - 1, j + 1, \ldots n$, ed 1 se $i = j$.

Consideriamo allora tutte le equazioni (2) in cui j sia fisso e i sia maggiore di q, ed insieme una sola delle (2) in cui i sia minore od eguale a q. Si ha un sistema di $n - q + 1$ equazioni lineari nelle derivate:

$$\frac{\partial x_{q+1}}{\partial x'_j}, \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial x'_j},$$

in numero di $n - q$, ed, eliminando queste, risulta evidentemente p'_{ij} espresso mediante le $\frac{\partial f_i}{\partial x_h}$ che

sono delle funzioni delle x, e mediante le $\frac{\partial x_h}{\partial x_k}$ $(h \leqq q; k > q)$ che sono le p_{hk}; si hanno così le p'_{ij} espresse per le p_{hk}, che è quello che si voleva trovare.

Fermiamoci a considerare specialmente un caso particolare di questo procedimento generale. Supponiamo che insieme al sistema delle variabili $x_1 \dots x_n$, sia da considerarsi un'ultima variabile x_{n+1}, la quale non entri però nelle formole (1), ed entri solamente in una $(n+1)^{ma}$ formola la quale sia del tipo specialissimo:

$$x'_{n+1} = x_{n+1}. \tag{3}$$

La trasformazione rappresentata dalle (1) e (3) non è in sostanza diversa dalla sola (1), ma è una nuova forma sotto cui può scriversi la (1) medesima.

Applichiamo allora il procedimento precedente, supponendo $q = n$; indicando con $p_1 \dots p_n$, le derivate rispetto ad x_{n+1} di $x_1 \dots x_n$, e derivando direttamente la (1) si ricava:

$$p'_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} p_h. \tag{4}$$

Supponiamo ora che le (1) sieno le trasformazioni di un gruppo ad r parametri essenziali; noi vogliamo dimostrare l'importante teorema:

Le trasformazioni nelle $2n$ *variabili* $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$, *rappresentate dalle formole* (1) *e* (4), *formano anch'esse un gruppo che è ad* r *parametri essenziali e che per di più è oloedricamente isomorfo al dato.*

Tal gruppo si chiama un *primo gruppo ampliato del dato*, e, come si vede, esso è determinato dal dato, come già abbiamo detto sul principio.

Se ne potrebbero considerare infiniti altri, che si otterrebbero in analogo modo o seguendo il procedimento generale e scegliendo per q uno speciale valore, ovvero anche immaginando aggregate alle variabili $x_1 \dots x_n$ un numero qualunque di s altre variabili e seguendo un procedimento simile a quello tenuto testè per il caso di $s = 1$.

E se poi facciamo delle considerazioni analoghe, ma introducendo oltre alle derivate di primo, anche quelle di second'ordine, si avrebbero in simile modo i *secondi gruppi ampliati* e così indefinitamente.

Per dimostrare che le (1) e (4) formano un gruppo, bisogna far vedere che se si passa dalle p alle p' con una trasformazione i cui parametri sieno le a, e delle p' alle p'' con una trasformazione di parametri b, si passerà dalle p alle p'' con la trasformazione prodotto delle due, cioè con quella i cui parametri sono le c legate alle a e b dalle solite relazioni. Ora:

$$p'_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} p_h,$$

$$p''_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x'_i} p'_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x'_i} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} p_h =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x'_h} \cdot \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} \right) p_h.$$

Ma essendo:

$$x''_k = f_k(x, c) = f_k(x', b),$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial x_h} = \frac{\partial f_k(x, c)}{\partial x_h};$$

ovvero:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} = \frac{\partial f_k(x, c)}{\partial x_h},$$

e quindi:

$$p''_k = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_k(x, c)}{\partial x_h} p_h,$$

alla quale formola appunto si giungerebbe, partendo dalla trasformazione $x''_k = f_k(x, c)$, che è il prodotto delle *due date.* Con ciò è dimostrato che *le trasformazioni ampliate formano un gruppo.*

È evidente che questo gruppo è ad r parametri essenziali come il dato; se il dato contiene la trasformazione identica anche questo gruppo ampliato la conterrà, e i parametri della trasformazione identica, saranno i medesimi per ambedue i gruppi.

Il gruppo ampliato, contenendo la trasformazione identica, se la contiene il gruppo dato, per un teorema del Cap. I, § 12, conterrà r trasformazioni infinitesime indipendenti, le quali saranno note quando lo saranno le equazioni differenziali caratteristiche del gruppo, e ciò per le cose sviluppate anche nel medesimo luogo. Cerchiamo allora tali equazioni differenziali.

Sieno:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \psi_{jk}(a) \qquad (h = 1 \dots n), \quad (5)$$

le equazioni differenziali relative al gruppo fondamentale dato; derivando rispetto ad x_{n+1}, ed osservando che le a sono da considerarsi indipendenti da questa variabile, si ha:

$$\frac{\partial p'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_{jh}(x')}{\partial x'_s} p'_s \right) \psi_{jk}(a),$$

e ponendo:

$$\pi_{jh}(x' p') = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_{jh}(x')}{\partial x'_s} p'_s, \qquad (6)$$

si ha:

$$\frac{\partial p'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \pi_{jh}(x' p') \psi_{jk}(a) \qquad (h = 1, \dots n) \quad (7)$$

Le equazioni differenziali del gruppo ampliato, nelle variabili $x_1, \dots x_n$, $p_1, \dots p_n$, sono dunque le (5) e le (7), e le trasformazioni infinitesime corrispondenti saranno perciò:

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_{jh} \frac{\partial}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{n} \pi_{jh} \frac{\partial}{\partial p_h}, \qquad (8)$$

che potremo indicare col simbolo:

$$X_j + \Pi_j. \qquad (j = 1, \dots r) \quad (9)$$

Osserviamo che dalla formola (6) si ricava immediatamente:

$$\frac{\partial \pi_{jh}(x, p)}{\partial p_s} = \frac{\partial \xi_{jh}(x)}{\partial x_s}. \qquad (10)$$

La trasformazione infinitesima (8) o (9) del gruppo ampliato, la chiameremo *trasformazione infinitesima ampliata*, e propriamente *diremo che* $X_j + \Pi_j$ *è la trasformazione infinitesima ampliata della* X_j.

Vogliamo ora dimostrare l'altra delle asserzioni fatte di sopra, che cioè *il gruppo ampliato è isomorfo oloedricamente al dato.*

Formando la parentesi:

$$\left.\begin{array}{l}(X_j + \Pi_j, X_i \, \Pi_i)\, F = (X_j X_i)\, F + (X_j \Pi_i)\, F + \\ \qquad + (\Pi_j \, X_i)\, F + (\Pi_j \, \Pi_i)\, F,\end{array}\right\} \quad (11)$$

è facile vedere che dei quattro termini del secondo membro solo il primo contiene derivate di F rispetto alle x, mentre gli altri non contengono che derivate rispetto alle p; intanto poichè le $X_j + \Pi_j$ generano un gruppo, il primo membro della precedente formola dovrà essere identicamente eguale a:

$$\sum_{s=1}^{r} c'_{jis} (X_s + \Pi_s)\, F, \qquad \text{(v. Cap. I, § 14)}$$

di cui i termini contenenti derivate di F rispetto alle x sono solamente quelli dati da:

$$\sum_{s=1}^{r} c'_{jis} X_s F;$$

questa espressione deve dunque identicamente coincidere con $(X_j X_i) F$, cioè con:

$$\sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s F,$$

e perciò le c' sono eguali alle c, e i due gruppi sono isomorfi.

Abbiamo visto che la trasformazione infinitesima ampliata di X_j è $X_j + \Pi_j$; si può ora far vedere che l'*ampliata della parentesi* $(X_j X_i)$ *è eguale alla parentesi delle ampliate di* X_j *e di* X_i, cioè è eguale al primo membro di (11).

Ciò riesce evidente dalla semplice ispezione delle precedenti formole, giacchè, per quanto si è dimostrato, il primo membro delle (11) è:

$$\sum_{s=1}^{r} c_{jis} (X_j + \Pi_j) F.$$

Ma essendo $(X_j X_i)$ eguale a $\sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s F$, la trasformazione ampliata di essa è precisamente quella data dalla formola precedente; perciò è dimostrato l'assunto.

Tutto ciò che abbiamo detto per lo speciale gruppo ampliato da noi considerato, può estendersi al caso di un gruppo ampliato più generale, cioè formato colla ipotesi che le variabili indipendenti sieno più di una, e che debbano considerarsi non solo le derivate prime, ma anche le derivate superiori; sussiste allora sempre la proprietà che *da un gruppo si ottiene un gruppo ampliato oloedricamente isomorfo.* Noi però non ci fermeremo su queste considerazioni più generali.

§ 6. Gruppo reciproco di un gruppo semplicemente transitivo ad n parametri essenziali.

Nel Cap. II, § 8 abbiamo detto che si può proporsi il problema di determinare il gruppo di tutte quelle trasformazioni le quali lasciano invariate le singole trasformazioni infinitesimali di un gruppo, e abbiamo promesso di risolvere questo problema in un caso speciale.

Il caso che vogliamo considerare è il seguente: le trasformazioni infinitesime date sieno assolutamente indipendenti e sieno in numero di n, in modo che (v. Cap. III, § 1) *il gruppo da esse formato sia semplicemente transitivo*; esse sieno indicate con:

$$Y_1\ Y_2 \ldots Y_n .$$

Introduciamo una nuova serie di variabili che chiameremo $x'_1 \ldots x'_n$, e indichiamo con $Y'_1 \ldots Y'_n$ le Y scritte nelle variabili x'. Scriviamo:

$$Y_k + Y'_k = Z_k , \qquad (k = 1, \ldots n) \qquad (1)$$

si otterranno i simboli Z di n trasformazioni infinitesime, assolutamente indipendenti, (perchè tale proprietà la hanno, per ipotesi, le Y e le Y' separatamente) in $2n$ variabili, cioè in:

$$x_1 \ldots x_n , \qquad x'_1 \ldots x'_n .$$

Il sistema delle equazioni:

$$Z_k F = 0, \qquad (2)$$

è, come facilmente si vede, un sistema completo (in forza delle nostre ipotesi) ed irreducibile; esso ammetterà perciò $2n - n = n$ integrali indipendenti:

$$w_1 \dots w_n ,$$

che, eguagliati a costanti arbitrarie:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 (x_1 \dots x_n \, x'_1 \dots x'_n) = a_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ w_n (x_1 \dots x_n \, x'_1 \dots x'_n) = a_n , \end{array}\right\} \quad (3)$$

danno luogo ad una trasformazione delle x nelle x', per la quale le Y' risultano identicamente eguali alle Y. Tutto ciò risulta da considerazioni precisamente analoghe a quelle sviluppate nel Cap. III, § 5, a proposito di un teorema, per il quale si fanno ivi ragionamenti che nel nostro caso si possono ripetere senza mutamenti.

Abbiamo dunque che *la più generale trasformazione richiesta è data dalle formole* (3).

Ora le formole (3) sono risolute rispetto ai parametri, i quali sono in numero di n essenziali, e quindi il gruppo delle trasformazioni (3) sarà semplicemente transitivo; inoltre è evidente che fra le trasformazioni (3) deve essere compresa la identica, perchè per questa le Y' risultano senz'altro le Y, quindi possiamo dire che esisteranno n trasformazioni infinitesime $X_1 \dots X_n$ le quali genereranno il gruppo (3) che è, come il dato, semplicemente transitivo, e queste, a causa di un teorema del Cap. II, § 8, dovranno tutte soddisfare alle relazioni:

$$(Y_i \, X_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \dots n). \quad (4)$$

Abbiamo dunque:

Dato un gruppo semplicemente transitivo ad n parametri essenziali, ne resta determinato un'altro anche semplicemente transitivo e ad n parametri, le cui trasformazioni infinitesime sono permutabili con tutte quelle del dato. Questo gruppo lo chiameremo *reciproco* del dato; ed è evidente infatti che *la relazione fra i due gruppi è reciproca.*

Tenendo presente la definizione, data nel Cap. II, § 8, di trasformazioni infinitesime eccezionali di un gruppo, ne viene poi evidentemente:

Le trasformazioni infinitesime comuni di due gruppi reciproci semplicemente transitivi, sono trasformazioni infinitesime eccezionali dei due gruppi.

È utile osservare che se $n = 1$, *i due gruppi reciproci risultano identici.*

CAPITOLO V.

Teoria invariantiva dei gruppi ampliati.

§ 1. Invariantività, rispetto ad un gruppo di trasformazioni, delle equazioni e delle espressioni pfaffiane.

Consideriamo una *forma differenziale* di primo ordine e di primo grado nelle variabili $x_1 \dots x_n$, cioè una espressione del tipo:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s \, d x_s \,, \tag{1}$$

dove $U_1 \dots U_n$ sieno funzioni delle x. Eguagliando questa forma a zero, si ha una cosidetta *equazione ai differenziali totali di primo ordine e di primo grado*, e una importante parte dell'*Analisi matematica* tratta della teoria di tali equazioni, all'intento di cercarne la cosidetta *integrazione*, di cercare cioè quella o quelle relazioni finite fra le x e fra costanti, donde possa dedursi la data relazione differenziale. E poichè Pfaff trovò per il primo (nel 1815) un risultato importante relativo

tali equazioni, così queste sogliono anche chiamarsi *equazioni pfaffiane*, mentre alle espressioni (1) si suol dare il nome di *espressioni pfaffiane.*

La teoria invariantiva di tali equazioni o dei sistemi di esse, la si può fare senza alcuna difficoltà, applicando i risultati ottenuti nel Cap. II, solo che naturalmente invece di considerare il semplice gruppo nelle $x_1 \ldots x_n$, bisognerà considerare l'ampliato, giacchè nelle equazioni pfaffiane, oltre che le x, figurano anche i differenziali delle x, il che porta che vi si possano far figurare, se si vuole, le derivate delle $x_1 \ldots x_n$, rispetto alla x_{n+1}, cioè le $p_1 \ldots p_n$ (v. Cap. IV, § 5), ciò che si otterrebbe immediatamente dividendo tutta l'equazione pfaffiana per $d\,x_{n+1}$.

Possiamo dunque ridurre il problema della invariantività, rispetto ad un gruppo, dell'equazione pfaffiana, a quello della invariantività, rispetto al primo gruppo ampliato del medesimo, dell'equazione:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s\, p_s = 0\,. \tag{2}$$

Secondo i risultati del Cap. II, § 2, la condizione perchè la equazione (2) resti invariata per tutte le trasformazioni di un gruppo ampliato, un gruppo cioè di cui una trasformazione infinitesimale generica è data da (v. Cap. IV, § 5):

$$X_j + \Pi_j\,, \tag{3}$$

è che la espressione:

$$(X_j + \Pi_j) \sum_{s=1}^{n} U_s\, p_s\,, \tag{4}$$

si annulli come conseguenza della equazione (2)

Ora calcolando (4), e osservando che le U non contengono le p, e tenendo presente il valore della Π_j, si trova:

$$\sum_{s=1}^{n} X_j U_s \, . \, p_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \, . \, \Pi_j \, p_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} X_j U_s \, . \, p_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \, . \, \pi_{js} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} X_j U_s \, . \, p_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_{js}}{\partial x_i} p_i \,,$$

donde si vede che la (4) è una funzione lineare omogenea nelle $p_1 \ldots p_n$; se quindi il suo annullarsi deve essere conseguenza della relazione fra x e p data dalla (2), bisogna e basta che la (4) sia eguale al prodotto di una funzione ρ *delle sole* x, per il primo membro di (2): questo risultato lo possiamo riferire ora, anzichè alla equazione (2), alla equazione pfaffiana corrispondente $\sum_{s=1}^{n} U_s \, d x_s = 0$, e basterà perciò moltiplicare tutte le p per $d x_{n+1}$, cioè sostituire alle p i differenziali delle x. Così facendo il calcolo della (4), si ha:

$$\sum_{s=1}^{n} X_j U_s \, . \, d x_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \, d \, (X_j \, x_s) \, .$$

Abbiamo dunque che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione pfaffiana* $\sum_{s=1}^{n} U_s \, d x_s = 0$ *resti invariata per le trasformazioni di un grup*

po nelle $x_1 \dots x_n$, *è che sia:*

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} (X_j\, U_s)\,.\, d\,x_s + \sum_{s=1}^{n} U_s\, d\,(X_j\, x_s) = \\ = \rho_j\,(x)\,.\sum_{s=1}^{n} U_s\, d\,x_s\,.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Un analogo risultato può ottenersi se in luogo di una sola equazione pfaffiana, si consideri un sistema di m di esse:

$$\sum_{s=1}^{n} U_{ks}\, d\,x_s = 0 \qquad (k = 1 \dots m). \qquad (6)$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte di sopra si ha che *le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema* (6) *sia invariante rispetto al gruppo di cui le trasformazioni infinitesime sieno le* X_j, *sono espresse dalla sussistenza delle* $r\,m$ *equazioni:*

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n} X_j\, U_{ks}\,.\, d\,x_s + \sum_{s=1}^{n} U_{ks}\, d\,(X_j\, x_s) = \\ = \sum_{\sigma=1}^{m} \rho_{k\sigma}\,(x) \sum_{s=1}^{n} U_{\sigma s}\, d\,x_s \quad \begin{pmatrix} j = 1 \dots r \\ k = 1 \dots m \end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad (7)$$

Quando queste relazioni sono verificate, noi diremo al solito che il sistema dato di equazioni pfaffiane *ammette la trasformazione infinitesima* X_j. Ed è facile far vedere che *se un sistema ammette due trasformazioni infinitesime* X_j, X_i, *ammetterà anche la trasformazione infinitesima* $(X_j\, X_i)$.

La dimostrazione di questo teorema si fa ricordando (v. Cap. II, § 2), che un teorema simile sussiste infatti per i sistemi invarianti di equazioni finite; ora dalle cose dette di sopra risulta che lo studio dell'invariantività dei sistemi di equazioni pfaffiane rispetto al gruppo delle X_j coincide con quello dei sistemi di equazioni del tipo (2) rispetto al gruppo ampliato, e il passaggio dall'una ricerca all'altra si fa semplicemente sostituendo dappertutto alle $p_1 \dots p_n$ i differenziali $d x_1 \dots d x_n$; e quando il sistema di equazioni pfaffiane ammette, nel senso anzidetto, la trasformazione infinitesima X_i, il corrispondente sistema di equazioni (2) ammette (nel senso ordinario del § 2 del Cap. II), la trasformazione ampliata della X_j, cioè la (3), e viceversa.

Laonde poichè il sistema di equazioni come (2) ammette, per il teorema surriferito, la trasformazione infinitesima $(X_j + \Pi_j, X_i + \Pi_i)$, il sistema di equazioni pfaffiane ammetterà quella di cui quest'ultima è l'ampliata; ma sappiamo (v. Cap. IV, § 5) che questa è l'ampliata di $(X_j X_i)$, dunque è dimostrato l'assunto.

Se invece di considerare un sistema di equazioni pfaffiane, vogliamo considerare semplicemente un sistema di *forme ai differenziali totali di primo ordine e di primo grado*, cioè di cosidette *espressioni pfaffiane*, allora possiamo ripetere le stesse considerazioni fatte di sopra, ma applicando anzichè i risultati del Cap. II, § 2, quelli del Cap. II, § 1, e si otterrebbe similmente il risultato che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè ciascuna espressione pfaffiana:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s \, d\, x_s \,,$$

resti invariata per tutte le trasformazioni del gruppo generato dalle X_j, è che si abbia identicamente:

$$\sum_{s=1}^{n} X_j \, U_s \, . \, d\, x_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \, . \, d\,(X_j \, x_s) = 0. \qquad (8)$$

§ 2. Invariante simultaneo di una espressione pfaffiana e di una trasformazione infinitesima.

Sia data una espressione pfaffiana U come la (1) del § prec., e una trasformazione infinitesima X i cui coefficienti sieno al solito le ξ. Mediante una qualunque trasformazione:

$$x'_i = f_i\,(x)\,,$$

sia la U che la X si possono ridurre a contenere le variabili x', e sieno rispettivamente U'_s, e ξ'_s i coefficienti delle U e X trasformate. Si avrà:

$$\left. \begin{aligned} U'_s &= \sum_{h=1}^{n} U_h \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \\ \xi'_s &= \sum_{h=1}^{n} \xi_h \, \frac{\partial x'_s}{\partial x_h} \,. \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

Formiamo il sommatorio del prodotto $U'_s \xi'_s$:

$$\sum_{s=1}^{n} U'_s \xi'_s = \sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_h \xi_k \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \cdot \frac{\partial x'_s}{\partial x_k}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_h \xi_k \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \cdot \frac{\partial x'_s}{\partial x_k};$$

ed osserviamo che:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \cdot \frac{\partial x'_s}{\partial x_k} = 1, \text{ se } h = k,$$

$$= 0, \text{ se } h \text{ è diverso da } k,$$

per modo che la precedente formola diventa semplicemente:

$$\sum_{s=1}^{n} U'_s \xi'_s = \sum_{h=1}^{n} U_h \xi_h,$$

la quale dimostra che la *espressione*:

$$\Lambda = \sum_{h=1}^{n} U_h \xi_h, \tag{2}$$

resta invariata per ogni trasformazione di variabili.

Si ha così *un invariante simultaneo della espressione pfaffiana e della trasformazione infinitesima.*

È importante mostrare come il medesimo invariante Λ compare nella formola che dà il risultato della operazione X sul primo membro della espressione pfaffiana, formola della quale abbiamo trat-

tato nel § prec. Abbiamo infatti ivi trovato che:

$$X \,.\, U = \sum_{s=1}^{n} X\, U_s \,.\, d\, x_s + \sum_{s=1}^{n} U_s\, d\,(X\, x_s)\,. \qquad (3)$$

Ora il secondo membro di (3) può scriversi:

$$= \sum_{s=1}^{n} X\, U_s \,.\, d\, x_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \,.\, d\, \xi_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial U_s}{\partial x_h} \,.\, d\, x_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_h}\, d\, x_h\,,$$

e aggiungendo e togliendo il termine:

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial U_h}{\partial x_s}\, d\, x_s\,,$$

possiamo scrivere (scambiando s con h in questo termine, quando lo prendiamo col segno positivo):

$$X\, U = \sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_h \left(\frac{\partial U_s}{\partial x_h} - \frac{\partial U_h}{\partial x_s} \right) d\, x_s + \\ + \sum_{s=1}^{n} d\,(U_s\, \xi_s),$$

cioè, ponendo come si usa di solito in tale teoria:

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_h} - \frac{\partial U_h}{\partial x_s} = (s, h), \qquad (4)$$

abbiamo infine:

$$X\, U = \sum_{s=1}^{n} \left[\sum_{h=1}^{n} \xi_h \,.\, (s, h) \right] d\, x_s + d\, \Lambda\,. \qquad (5)$$

Servendoci di questa formola possiamo dare un'altra forma al teorema, sviluppato nel § prec., e che dà la condizione necessaria e sufficiente perchè la equazione pfaffiana $U = 0$ sia invariante per le trasformazioni del gruppo X. Eguagliando il secondo membro di (5) a:

$$\rho\, U,$$

si ottiene che *perchè* $U = 0$ *sia invariante per il gruppo generato da* X, *è necessario e basta che si verifichi la relazione:*

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_h \,.\, (s, h)\, d s + d\, \Lambda = \rho\, U. \tag{6}$$

Se invece di una sola equazione pfaffiana, ne abbiamo, come nel § prec., un sistema, e se in questa formola poniamo al secondo membro una combinazione lineare dei primi membri di esse, otteniamo le formole che devono sussistere perchè il dato sistema ammetta la trasformazione infinitesimale X (v. formola 7, § prec.).

L'invariante di cui tratto in questo § è stato da me esteso al caso di una espressione ai differenziali totali di 2.° ordine, e indi al caso più generale di un ordine qualunque (vedi le mie Memorie: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni ai differenziali totali di second' ordine*, Ann. di mat., (3), t. 7, § 3; *Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un' altra alle derivate parziali*, Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902.)

Per la estensione poi della formola (5) al caso del 2.° ordine, vedi le altre mie recenti Note:

Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di 2.° ordine e su di una estensione dei simboli di Christoffel, Rend. Acc. Lincei, (5), t. XI, 2.° sem. 1902; *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2.° ordine*, ibid.

§ 3. Sistema aggiunto di un dato sistema di equazioni pfaffiane. Sistemi completamente integrabili.

Abbiamo già accennato nel Cap. I, § 10, al legame intimo che esiste fra i sistemi di equazioni a derivate parziali, lineari omogenee di primo ordine, e i sistemi di equazioni lineari ai differenziali totali di primo ordine (equazioni pfaffiane); ora vogliamo entrare in maggiori particolari.

Sia dato il sistema di $m < n$ equazioni pfaffiane:

$$\sum_{s=1}^{n} U_{ks}\, d\, x_s = 0 \qquad (k = 1 \dots m), (m < n). \quad (1)$$

e supponiamo che queste sieno linearmente indipendenti, cioè che non sia zero la matrice dei coefficienti U:

$$\left\| \begin{matrix} U_{11} & \dots & U_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{m1} & \dots & U_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad (m < n). \quad (2)$$

Esisteranno allora dei sistemi (precisamente in

numero di $n - m$ fra loro *indipendenti*) di n quantità:

$$\begin{matrix} \xi_{11} & \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{n-m,1} & \ldots\ldots & \xi_{n-m,n}\, , \end{matrix}$$

tali che sussistano identicamente le equazioni:

$$\sum_{h=1}^{n} U_{kh}\, \xi_{ih} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} k = 1 \ldots\ldots m \\ i = 1 \ldots n - m \end{matrix}\right). \quad (3)$$

In effetti considerando in queste equazioni lineari omogenee, come incognite le ξ, e facendo variare k si ha un sistema di m equazioni fra n incognite, e di cui la matrice dei coefficienti, che è la (2), è diversa da zero, ha cioè per caratteristica m; vi saranno allora esattamente $n - m$ sistemi *indipendenti* di soluzioni, di cui perciò la matrice è anch'essa diversa da zero. Abbiamo così che anche la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{n-m,1} & \ldots & \xi_{n-m,n}\, , \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

è diversa da zero.

Formiamo ora il sistema di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di primo ordine, di cui i coefficienti sieno le ξ:

$$X_i F \equiv \sum_{s=1}^{n} \xi_{is} \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0, \quad (i = 1, \ldots n - m). \quad (5)$$

Questo sistema, risultante di $n-m$ equazioni, si chiama *il sistema aggiunto del sistema* (1); considerando delle (5) solo i primi membri si otterrebbe invece ciò che può dirsi *un sistema di trasformazioni infinitesime aggiunto* al sistema (1).

La relazione fra i due sistemi (1) e (5) è del tutto reciproca, giacchè, date viceversa le (5) assolutamente indipendenti (v. Cap. I, § 8), cioè in modo che la matrice (4) sia diversa da zero, si possono trovare similmente m sistemi indipendenti di quantità U soddisfacenti le (3), e quindi si possono costruire le (1); diremo perciò anche che (1) è *sistema aggiunto* di (5).

È utile osservare che i due sistemi (1) e (5) possono rappresentarsi sotto una forma, in un certo senso, più concisa e simmetrica; in luogo del sistema (1) può infatti scriversi:

$$\left\| \begin{matrix} d x_1 & \ldots & d x_n \\ \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-m,1} & \ldots & \xi_{n-m,n} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (6)$$

intendendo con questa notazione che si pongano eguali a zero tutti gli m determinanti indipendenti di ordine $n-m+1$ ricavati da questa matrice; e similmente in luogo del sistema (5) può scriversi:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \\ U_{11} & \ldots & U_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{m1} & \ldots & U_{m,n} \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (7)$$

Giacchè è facile far vedere che *come conseguenza delle* (1), fra gli elementi di ciascuna linea della matrice (6), sussiste sempre la medesima relazione lineare omogenea; moltiplichiamo la prima colonna di (6) per U_{k1}, la seconda per $U_{k2} \dots$ la n^{ma} ma per U_{kn}, sommiamo e otteniamo infatti zero su ciascuna linea, in forza delle (1) e (3). Similmente si dimostrerebbe per la matrice (7).

Nel caso di *una sola* equazione pfaffiana, il sistema aggiunto contiene $n-1$ equazioni.

Quando il sistema aggiunto (5) è un sistema *completo* (v. Cap. I, § 9), allora diremo che il sistema di equazioni pfaffiane è *completamente integrabile.*

Considerando i primi membri delle (5) come i simboli di altrettante trasformazioni infinitesime; dato un qualunque punto P dello spazio $x_1 \dots x_n$, a ciascuna di tali trasformazioni infinitesime, sarà coordinata una *direzione* uscente da P (v. Cap. II, § 5); e si avranno così $n-m$ direzioni indipendenti uscenti da P, le quali, appunto perchè indipendenti, non giaceranno in una varietà lineare di dimensione inferiore ad $n-m$, ma la varietà di dimensione minima in cui esse giaceranno, sarà quella di dimensione $n-m$.

Quali saranno le equazioni di tale varietà lineare? Poichè i coseni degli angoli che ciascuna delle $n-m$ direzioni forma con gli assi coordinati (rettangolari) sono proporzionali a $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots \xi_{in}$, così evidentemente se formiamo una matrice come la (6), dove però in luogo degli elementi della prima linea poniamo gli altri:

$$Y_1 - x_1 \dots\dots Y_n - x_n ,$$

dove $x_1 \ldots x_n$ sono le coordinate del punto P, e $Y_1 \ldots Y_n$ sono le coordinate *correnti* della varietà, e la eguagliamo a zero, otteniamo le richieste equazioni della varietà lineare; si ha così:

$$\left\| \begin{matrix} Y_1 - x_1 & \ldots\ldots & Y_n - x_n \\ \xi_{11} & \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{n-m,1} & \ldots\ldots & \xi_{n-m,n} \end{matrix} \right\| = 0; \qquad (8)$$

ma perchè il sistema delle (6) è, come abbiamo detto, equivalente a quello delle (1), ne viene che le m equazioni della varietà lineare ad $n - m$ dimensioni costituita dalle $n - m$ direzioni indipendenti coordinate alle $n - m$ trasformazioni infinitesime X_i, sono date da:

$$\sum_{s=1}^{n} U_{ks}(Y_s - x_s) = 0, \qquad (k = 1 \ldots m) \qquad (9)$$

equazioni che, come si vede, hanno nella loro formazione il più intimo rapporto col sistema (1) delle equazioni pfaffiane.

Supponiamo che il sistema (5) sia *completo;* esso ammetterà allora m integrali:

$$\varphi_1 - c_1 = 0, \ldots\ldots \varphi_m - c_m = 0, \qquad (10)$$

e le equazioni 10), appunto perchè i loro primi membri soddisfanno alle (5), formano un sistema di equazioni che ammette le trasformazioni infinitesime X_i, e, per un teorema del Cap. II, § 5, la varietà ad m dimensioni da esse rappresentate, ha per varietà lineare tangente quella delle $n - m$ direzioni coordinate alle $X_1 \ldots X_{n-m}$, cioè quella

appunto di cui le equazioni sono le (9). Ora se $Y_1 \ldots Y_n$ sono le coordinate di un punto della detta varietà lineare tangente, i binomi:

$$Y_1 - x_1, \ldots\ldots Y_n - x_n,$$

dove $x_1 \ldots x_n$ sono le coordinate del punto P di contatto, sono proporzionali ai valori dei differenziali $dx_1 \ldots dx_n$, quando questi si sottopongano alla condizione che il punto $x_1 \ldots x_n$ debba restare sempre sulla varietà (10), cioè che sia:

$$d\varphi_1 = 0, \ldots\ldots d\varphi_m = 0. \qquad (11)$$

Quindi è evidente che le (9) sono soddisfatte se in esse, in luogo dei binomi $Y_s - x_s$, pongo i differenziali dx_s sottoposti alle condizioni (11); in altri termini, poichè con tali cangiamenti le (9) diventano le (1), possiamo dire che le (1) sono soddisfatte dalle equazioni (10), cioè il sistema delle m equazioni pfaffiane (1), è soddisfatto dagli m integrali (10), con m costanti arbitrarie.

Abbiamo dunque:

Quando il sistema aggiunto di un sistema pfaffiano, è completo, cioè quando il sistema pfaffiano è, giusta la definizione data, completamente integrabile, allora questo è integrabile con tante equazioni e tante costanti arbitrarie, per quanto è il numero delle sue equazioni.

Viceversa potrebbe assumersi questa proprietà come fondamento per la definizione di un sistema pfaffiano completamente integrabile.

Un sistema di $n-1$ equazioni pfaffiane indipendenti fra n variabili, è sempre completamente integrabile.

Consideriamo l'invariante simultaneo Λ (v. § prec.) di una espressione pfaffiana data dal primo membro di una delle (1), e di una delle trasformazioni infinitesimali X_i del sistema aggiunto; tale invariante è dato evidentemente dal primo membro di (3) e quindi è sempre zero. Viceversa data una espressione pfaffiana U, e una trasformazione infinitesima X, se l'invariante Λ è zero identicamente, i coefficienti ξ della trasformazione infinitesima soddisferanno alla relazione:

$$\sum_{h=1}^{n} U_h \xi_h = 0 ,$$

e quindi la X apparterrà al sistema aggiunto alla $U=0$; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione infinitesima appartenga al sistema aggiunto di un dato sistema di equazioni pfaffiane, è che sieno zero tutti gli invarianti simultanei dei primi membri di queste e della trasformazione infinitesima data.

Da ciò che qui si è detto, risulta poi anche che i due *sistemi, l'aggiunto e il dato, sono fra loro connessi invariantivamente.*

Vogliamo stabilire che forma acquista il sistema aggiunto di un dato sistema di equazioni pfaffiane, quando questo lo si intenda messo sotto una forma speciale la quale del resto non è *sostanzialmente* diversa dalla forma delle (1), ma si ottiene risolvendo queste rispetto ai differenziali di m variabili.

Risolviamo le (1) rispetto alle:

$$d\, x_{n-m+1} \ldots\ldots d\, x_n ,$$

e si ha allora il sistema, equivalente naturalmente al sistema (1) stesso:

$$d\,x_{n-m+k} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{ks}\,d\,x_s = 0 \quad (k = 1 \ldots m). \quad (12)$$

Cerchiamo le ξ relative a tale sistema; considerando per un momento il sistema (12) formalmente come un caso particolare del sistema (1), si ha che i coefficienti generali U_{ks} sono diventati:

$-V_{ks}$ se $s = 1 \ldots\ldots n - m$,

1 se $s = n - m + k$,

0 se $s = n - m + \tau$, dove τ è diverso da k.

Le relazioni (3) diventano allora:

$$-\sum_{h=1}^{n-m} V_{kh}\,\xi_{ih} + \xi_{i,n-m+k} = 0,$$

dalle quali dobbiamo trovare gli $n - m$ sistemi indipendenti delle ξ, ognuno dei quali è contrassegnato dall'indice i. Dobbiamo perciò risolvere il sistema di equazioni:

$$-\sum_{h=1}^{n-m} V_{kh}\,\xi_h + \xi_{n-m+k} = 0, \qquad (13)$$

considerando come incognite le ξ, di cui il numero è maggiore di quello delle equazioni stesse. Possiamo disporre arbitrariamente delle prime $n - m$ di esse, e ricavarne i valori delle altre; porremo allora una prima volta:

$$\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0 \ldots\ldots \xi_{n-m} = 0,$$

ed otterremo:

$$\xi_{n-m+k} = V_{k1};$$

si ha così un primo sistema di ξ che contrassegneremo con l'indice $i = 1$, come *primo* indice delle ξ stesse, cioè porremo:

$$\xi_{11} = 1, \xi_{12} = 0 \dots \xi_{1n-m} = 0, \xi_{1,n-m+1} = V_{11} \dots \xi_{1n} = V_{m1}.$$

Poniamo poi ancora nelle (13):

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 1, \ \xi_3 = 0, \dots \xi_{n-m} = 0,$$

ed otterremo:

$$\xi_{n-m+k} = V_{k2},$$

e quindi il secondo sistema:

$$\xi_{21} = 0, \xi_{22} = 1, \dots \xi_{2,n-m} = 0, \xi_{2,n-m+1} = V_{12}, \dots \xi_{2,n} = V_{m2},$$

e così di seguito, otteniamo in generale:

$$\xi_{is} = 0 \text{ per } s \leqq n - m, \text{ ma diverso da } i,$$
$$\xi_{ii} = 1,$$
$$\xi_{i,n-m+k} = V_{ki},$$

colle quali apposizioni il sistema aggiunto (5) diventa:

$$\left. \begin{array}{c} X_i F \equiv \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \sum\limits_{k=1}^{m} V_{ki} \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-m+k}} = 0, \\ (i = 1 \dots\dots n - m). \end{array} \right\} \quad (14)$$

Si ha dunque il risultato rimarchevole che *quando il sistema di equazioni pfaffiane è risoluto rispetto ai $dx_{n-m+1}, \dots dx_n$, il sistema aggiunto è risoluto rispetto alle* $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dots \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-m}}$.

È da notarsi qui una proprietà caratteristica del sistema (14), proprietà però che è relativa solo alla forma sotto cui si presenta quel sistema, ed è che *se esso rappresenta un sistema completo* (v. Cap. I, § 10), *allora le parentesi* $(X_i X_j)$, *anzichè essere, come in generale, combinazioni lineari delle* X *stesse, sono zero;* giacchè effettuando l'indicata parentesi, è facile vedere che i coefficienti delle derivate:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial x_{n-m}}, \tag{15}$$

risultano tutti zero, e quindi non si hanno che termini contenenti le:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n-m+k}};$$

perciò, se il risultato deve essere una combinazione lineare dei primi membri delle (14), (in ciascuna delle quali appare sempre una e una sola delle derivate (15), e per dippiù quella fra le (15) che è contenuta in una equazione, non appare più in nessun'altra), esso non può essere che zero. Un sistema completo messo sotto la forma (14) lo chiameremo un *sistema Jacobiano speciale*, riserbando il nome di *sistema Jacobiano generale* a quello godente della proprietà che le parentesi $(X_i X_j)$ sieno zero, senza che le X_i sieno sotto la forma speciale (14).

Vogliamo ora dimostrare il seguente importante teorema, che mostra il legame intimo che c'è fra

la completa integrabilità del sistema di equazioni pfaffiane, e le trasformazioni infinitesime ammesse dal sistema stesso:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di equazioni pfaffiane, sia completamente integrabile, è che esso ammetta tutte le trasformazioni infinitesime rappresentate dal proprio sistema aggiunto.

Per dimostrare con facilità questo teorema considereremo il sistema pfaffiano dato messo sotto la forma (12), per modo che il sistema aggiunto lo si potrà considerare sotto la forma (14).

Quando il sistema (14) è completo, dovranno essere soddisfatte identicamente le condizioni:

$$X_i V_{ks} - X_s V_{ki} = 0, \quad (i, s = 1, \ldots, n - m) \quad (16)$$

e d'altra parte queste condizioni sono anche sufficienti perchè il sistema (14) sia completo.

Adoperando ora la formola (6) del § 2, cerchiamo le condizioni perchè ciascuna equazione del sistema (12) p. es. la k^{ma}, ammetta una trasformazione infinitesima del tipo rappresentato dal primo membro della (14). Osservando che in tal caso nella citata formola (6) bisogna porre:

$$\Lambda = 0, \quad \xi_1 = 0, \ldots \xi_{i-1} = 0, \quad \xi_i = 1,$$
$$\xi_{i+1} = 0, \ldots \xi_{n-m} = 0, \ \xi_{n-m+h} = V_{hi}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m),$$

si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{s=1}^{n} \left[(s, i) + \sum_{h=1}^{m} V_{hi} (s, n - m + h)\right] d x_s , \\ \qquad (i = 1, \ldots, n - m) \end{array}\right\} \quad (17)$$

come risultato della operazione X_i sul primo membro di una delle (12); in questa formola resta poi ancora a calcolare per il nostro caso le espressioni (s, i) e $(s, n-m+h)$ i cui valori generali sono dati dalla formola (4) del § prec.

I coefficienti della (12) sono rispettivamente:

$$U_1 = -V_{k1}, \ldots\ldots\ldots\ldots U_{n-m} = -V_{k,n-m},$$
$$U_{n-m+1} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots U_{n-m+k-1} = 0,$$
$$U_{n-m+k} = 1, \quad U_{n-m+k+1} = 0, \ldots\ldots U_n = 0;$$

si ha perciò:

$$(s, i) = -\frac{\partial V_{ks}}{\partial x_i} + \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} \quad \text{per } s = 1, 2, \ldots, n-m,$$

$$(s, i) = \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} \quad \text{per } s = n-m+1, \ldots, n,$$

$$(s, n-m+h) = -\frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}} \quad \text{per } s = 1, \ldots, n-m,$$

$$(s, n-m+h) = 0, \quad \text{per } s = n-m+1, \ldots, n.$$

La espressione (17) diventa perciò:

$$\sum_{s=1}^{n-m}\left[\left(\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} - \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_i}\right) - \sum_{h=1}^{m} V_{hi}\frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}}\right]dx_s + \\ + \sum_{h=1}^{m}\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}}\, d\,x_{n-m+h},$$

che possiamo scrivere identicamente:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}}\left[d\,x_{n-m+h} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{hs}\, d\,x_s\right] + \\ \displaystyle + \sum_{s=1}^{n-m}\left[\left(\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} - \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_i}\right) + \sum_{h=1}^{m}\left(V_{hs}\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}} - \right.\right. \\ \displaystyle \qquad\qquad \left.\left. - V_{hi}\frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}}\right)\right] d\,x_s . \end{array}\right\} \quad (18)$$

La espressione contenuta dentro la seconda parentesi quadrata non è altro che il primo membro della (16), quindi si vede che se le (16) sono identicamente soddisfatte, la espressione (18) si riduce ad una combinazione lineare dei primi membri delle (12), il che viene a dire appunto, in forza di quanto si è detto nel § prec., che le (12) ammettono le trasformazioni infinitesime del sistema aggiunto (14); d'altra parte se la (18) è identicamente eguale ad una combinazione lineare dei primi membri delle (12):

$$= \sum_{h=1}^{m} \gamma_h \left[d\, x_{n-m+h} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{hs}\, d\, x_s \right],$$

paragonando i coefficienti dei differenziali $d x_{n-m+h}$, risulta che dovrà essere necessariamente:

$$\gamma_h = \frac{\partial\, V_{ki}}{\partial\, x_{n-m+h}},$$

e quindi il secondo sommatorio della formola (18) dovrà essere identicamente zero, cioè dovrà essere zero indipendentemente dai valori delle $d\, x_s$; perciò dovranno essere verificate le relazioni (16). Con ciò il teorema resta dimostrato.

§ 4. Sistemi di equazioni pfaffiane congiunti invariantivamente al sistema dato. Bibliografia sulla teoria delle equazioni pfaffiane.

Abbiamo visto nel § prec., come dato un sistema di equazioni pfaffiane, se ne deduca il cosidetto *sistema aggiunto* (di equazioni a derivate parziali), unito invariantivamente al dato; ora vogliamo ricercare altri sistemi godenti di analoga proprietà.

Prima di tutto, considerando come nel § prec., i primi membri delle equazioni del sistema aggiunto, come rappresentanti trasformazioni infinitesime X_i, vogliamo esaminare un altro notevole legame che c'è (oltre quello già studiato nel § prec.), tra queste trasformazioni infinitesime e le equazioni del sistema dato.

Essendo zero l'invariante Λ relativo ad una qualunque equazione del sistema dato, e ad una delle trasformazioni infinitesimali X_i, applicando la formola (6) del § 2, si vede senz'altro che il risultato della operazione X_i sulla k^{ma} equazione pfaffiana del sistema (1), è dato dalla formola:

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_{ih} \left(\frac{\partial U_{ks}}{\partial x_h} - \frac{\partial U_{kh}}{\partial x_s} \right) d x_s ,$$

donde appare che *se in luogo di operare la* X_i, *opero la medesima, ma moltiplicata per un fattore* σ *funzione delle* x, *il risultato sarà lo stesso di prima, ma moltiplicato per lo stesso fattore* σ, e

quindi: *se il sistema di equazioni pfaffiane ammette la* X_i, *ammetterà anche la* σX_i.

Di qui risulta ancora che *se il dato sistema ammette un certo numero delle* X, *appartenenti al sistema aggiunto, ammetterà anche una qualunque combinazione lineare a coefficienti variabili delle medesime.*

Ciò posto consideriamo il sistema di trasformazioni infinitesime:

$$\chi_1 X_1 + \dots\dots + \chi_{n-m} X_{n-m}, \qquad (1)$$

in cui le X sieno quelle date dalla formola (5) del § precedente, e le χ sieno delle funzioni arbitrarie delle x; questo sistema di trasformazioni infinitesime è congiunto invariantivamente col sistema dato delle equazioni pfaffiane, essendo evidente che l'invariante Λ relativo ad una delle (1) e ad una delle equazioni pfaffiane date è sempre zero.

Se noi perciò operiamo una qualunque delle (1) sui primi membri di ciascuna delle equazioni pfaffiane, otterremo altre forme pfaffiane le quali saranno in generale diverse dalle date, ma saranno con queste invariantivamente connesse. Solo nel caso in cui il sistema dato fosse completamente integrabile, il nuovo sistema così ottenuto sarebbe identico coll'antico, e ciò in forza di un teorema del § precedente.

Esaminiamo allora come è formato questo sistema.

Per semplicità assumiamo sia il sistema dato che l'aggiunto sotto le forme ridotte (12) e (14) del § precedente, cioè poniamo il sistema dato

sotto la forma:

$$\Delta_k \equiv d\,x_{n-m+k} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{ks}\,d\,x_s = 0 \quad (k = 1,\ldots, m), \tag{2}$$

e il sistema aggiunto sotto la forma:

$$\left. \begin{array}{l} X_i\,F \equiv \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} V_{ki} \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-m+k}} = 0, \\ \qquad\qquad (i = 1,\ldots, n-m). \end{array} \right\} \tag{3}$$

Il risultato della operazione X_i sul primo membro della (2), lo abbiamo già calcolato nel § prec., (v. formola (18)); esso è:

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}} \Delta_h + \sum_{s=1}^{n-m} [X_i V_{ks} - X_s V_{ki}]\,d\,x_s, \tag{4}$$

e quindi moltiplicando questo risultato per χ_i e sommando rispetto ad i da 1 ad $n-m$, otterremo il risultato dell' operazione (1) su Δ_k. Ma poichè le χ sono funzioni arbitrarie, così il sistema di tutte le equazioni che si ottengono eguagliando a zero tali risultati, sarà equivalente al sistema delle equazioni ottenute eguagliando a zero le (4). Aggregando poi a questo sistema quello delle:

$$\Delta_h = 0;$$

i primi termini delle (4) spariscono e restano le equazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{ki} \equiv \displaystyle\sum_{s=1}^{n-m} [X_i\ V_{ks} - X_s\ V_{ki}]\,d\,x_s = 0, \\ \qquad \left(\begin{array}{l} k = 1,\ldots, m \\ i = 1,\ldots, n-m \end{array} \right), \end{array} \right\} \tag{5}$$

che possono scriversi anche:

$$\Delta_{ki} = \sum_{s=1}^{n-m} (X_i\, X_s)\, x_{n-m+k}\, .\, d\, x_s = 0. \qquad (6)$$

Abbiamo perciò il risultato:
Il sistema delle equazioni pfaffiane:

$$\Delta_k = 0, \qquad \Delta_{ki} = 0, \qquad (7)$$

è congiunto invariantivamente col sistema dato:

$$\Delta_k = 0.$$

Dimostriamo ora che *il sistema (7) è sempre un sistema completamente integrabile.*

Naturalmente il sistema (7) non sarà formato in generale di equazioni tutte indipendenti, giacchè il numero delle variabili x essendo n, non possono darsi più di $n - 1$ equazioni pfaffiane indipendenti e compatibili; quando parliamo del sistema (7) intendiamo perciò sempre parlare del sistema di quelle fra le (7) che, essendo nel massimo numero possibile, sono fra loro indipendenti.

Ricerchiamo prima di tutto il sistema aggiunto del sistema (7), o, ciò che è lo stesso, le trasformazioni infinitesime rappresentate da tal sistema aggiunto.

Una qualunque di queste sarà rappresentata da:

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

ovvero:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \xi_{n-m+k} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+k}}, \qquad (8)$$

dove le ξ soddisfanno al solito alle condizioni (3) del § precedente, quando naturalmente in luogo delle U si pongano i valori dei rispettivi coefficienti del sistema (7).

Ora tali coefficienti sono i seguenti:

$$
\begin{array}{rcc}
 & \text{per } \Delta_k: & \text{per } \Delta_{hi}: \\
 & -V_{k1}\quad , & (X_i\, X_1)\, x_{n-m+h} \\
 & \cdots & \cdots \\
 & -V_{k,n-m}\quad , & (X_i\, X_{n-m})\, x_{n-m+h} \\
k-1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \\
 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot \\
 & 0 & 0
\end{array}
$$

quindi i coefficienti ξ soddisfano alle relazioni:

$$
-\sum_{j=1}^{n-m} V_{kj}\,\xi_j + \xi_{n-m+k} = 0 \qquad (k = 1 \ldots m) \tag{9}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n-m} (X_i\, X_j)\, x_{n-m+h} \,.\, \xi_j = 0, \begin{pmatrix} h = 1, \ldots m) \\ i = 1 \ldots n-m) \end{pmatrix} \tag{10}
$$

È facile allora vedere, tenendo presenti i valori delle X (v. formole (3)), che la trasformazione infinitesima (8) può scriversi semplicemente:

$$
\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j\, X_j\,; \tag{11}
$$

infatti, moltiplicando le (3) (in cui si sia mutato i in j), per ξ_j e sommando rispetto a j, si ha:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j X_j = \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n-m} V_{kj} \xi_j \right) \frac{\partial}{\partial x_{n-m+k}},$$

e per effetto della formola (9), il coefficiente della seconda parte si riduce semplicemente a ξ_{n-m+k}, e quindi tutta l'espressione si riduce esattamente alla (8).

Applichiamo ora la trasformazione infinitesima (11) ad una Δ_k qualunque; abbiamo:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \, . \, X_j \, \Delta_k,$$

che può scriversi, per effetto della formola (4):

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \frac{\partial V_{kj}}{\partial x_{n-m+h}} \, . \, \Delta_h +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \left[X_j \, V_{ks} - X_s \, V_{kj} \right] d\, x_s ,$$

ma la seconda parte, adoperando la stessa riduzione che dalla formola (5) ci ha condotto alla formola (6), può scriversi anche:

$$\sum_{s=1}^{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \left(X_j \, X_s \right) x_{n-m+k} \, . \, d\, x_s ,$$

e questa espressione è zero in forza della relazione (10) cui soddisfano le ξ; onde si vede che la trasformazione infinitesima (11) applicata su una Δ_k, dà per risultato una relazione lineare delle Δ_k medesime, e perciò queste ammettono ıtte le trasformazioni infinitesime del sistema ;giunto al sistema (7).

Poichè inoltre il sistema (7) è congiunto invariantemente col sistema dato (2), ne viene che le medesime trasformazioni infinitesime saranno ammesse da tutto il sistema (7), cioè questo ammette tutte le trasformazioni infinitesime rappresentate dal proprio sistema aggiunto. In forza del teorema del § precedente, si ha perciò che il sistema (7) è un sistema completamente integrabile. Abbiamo dunque infine il seguente risultato:

Dato un sistema qualunque (2) *di equazioni pfaffiane, operando su esso le trasformazioni infinitesime del proprio sistema aggiunto, ed aggregando al sistema così ottenuto il sistema dato, si ha un altro sistema di equazioni pfaffiane (dato dalle* (7)) *congiunto invariantivamente al dato; le trasformazioni infinitesime rappresentate dal sistema aggiunto di questo ultimo, sono trasformazioni ammesse dal sistema primitivo dato, ed infine il nuovo sistema ottenuto nel modo indicato è un sistema completamente integrabile.* Di qui ne viene anche che riapplicando al sistema (2) o (7) le trasformazioni infinitesime rappresentate dal sistema aggiunto di (7), cioè ripetendo un' operazione analoga a quella fatta in principio di questo §, non si verrebbero ad ottenere dei *nuovi* sistemi di equazioni pfaffiane.

Esaminiamo ora per poco il caso particolare in cui m sia eguale ad 1, cioè in cui sia data una sola equazione pfaffiana:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s \, d x_s = 0.$$

Per uniformarsi alle notazioni adoperate di sopra, immaginiamola risoluta rispetto a dx_n, (supponendo naturalmente che U_n sia diverso da zero), e scriviamo perciò:

$$\Delta = dx_n - \sum_{s=1}^{n-1} V_s \, dx_s = 0, \quad V_s = -\frac{U_s}{U_n} \quad (12)$$

Le trasformazioni infinitesime X_i del sistema aggiunto, saranno:

$$X_i F \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad (i = 1, \ldots, n-1). \quad (13)$$

Le equazioni (6) cioè le $\Delta_{ki} = 0$ del § prec., diventano allora:

$$\sum_{s=1}^{n-1} (X_i X_s) x_n \, . \, dx_s = 0,$$

e con facili calcoli, e adoperando anche il simbolo introdotto colla formola (4) del § 2, si ha il sistema di equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i \equiv \sum_{s=1}^{n-1} [(s,i) U_n + (i,n) U_s + (n,s) U_i] \, dx_s = 0 \\ (i = 1, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} (14)$$

che insieme alla equazione (12) rappresenta un sistema, per le cose anzidette, completamente integrabile, e congiunto invariantivamente all'equazione (12); il sistema aggiunto del sistema formato da (12) e (14) sarà perciò *un sistema completo congiunto invariantivamente al dato*, che chiameremo sistema V.

Questo sistema completo V sarà formato dalle equazioni:

$$\sum_{s=1}^{n} \xi'_s \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0, \qquad (V) \qquad (15)$$

dove le ξ' rappresentano tutti i possibili sistemi indipendenti di soluzioni delle equazioni:

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{s=1}^{n-1} [(s, i)\, U_n + (i, n)\, U_s + (n, s)\, U_i\,]\, \xi'_s = 0 \\ (i = 1,\ 2, \ldots n - 1) \end{array}\right\} \quad (16)$$

$$\sum_{s=1}^{n} U_s\, \xi'_s = 0. \qquad (17)$$

I coefficienti delle equazioni (16) sono espressioni che mutano di segno con lo scambio dei due indici s, i; li possiamo, per un momento, rappresentare col simbolo:

$$[s,\ i],$$

che soddisferà alla relazione:

$$[s\ i] = -[i\ s].$$

Perciò la matrice dei coefficienti delle equazioni (16) è un determinante emisimmetrico d'ordine $n - 1$. Se noi supponiamo n *pari*, tal determinante sarà zero, e quindi le n equazioni (16) e (17) si riducono *al più* ad $n - 1$, ed il sistema V conterrà *almeno* una equazione.

In generale *supposto* λ *la caratteristica della matrice:*

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & [2,1] & \ldots [n-1,1] & 0 \\ [1,2] & 0 & \ldots [n-1,2] & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,n-1], & [2,n-1] \ldots & 0 & 0 \\ U_1 & U_2 & \ldots \quad U_{n-1} & U_n \end{array} \right\|, \quad (18)$$

il sistema (15) *risulterà di* $n-\lambda$ *equazioni indipendenti.*

La matrice precedente ha il più intimo rapporto coll'altra:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & (21) \ldots\ldots & (n-1,1) & (n,1) \\ (12) & 0 \ldots\ldots & (n-1,2) & (n,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,n) & (2,n) \ldots\ldots & (n-1,n) & 0 \\ U_1 & U_2 \ldots\ldots & U_{n-1} & U_n \end{array} \right\| \quad (19)$$

la cui caratteristica è, come si dimostra facilmente, *un numero invariante per ogni trasformazione della forma pfaffiana data;* ma noi non possiamo entrare in questi particolari.

Prima di terminare vogliamo solo esaminare il caso in cui la caratteristica di (19) sia *2*. Si avrà allora l'annullarsi identico dei determinanti di terzo ordine:

$$\left| \begin{array}{ccc} U_i & U_j & U_h \\ 0 & (i,j) & (i,h) \\ (h,i) & (h,j) & 0 \end{array} \right|,$$

cioè:

$$U_i\,(j\,h) + U_j\,(h\,i) + U_h\,(i\,j) = 0,$$

donde si vede che tutti gli elementi delle prime $n-1$ linee di (18), si riducono a zero, cioè (18) viene ad acquistare la caratteristica *1*; perciò il sistema V viene a ridursi identico al sistema aggiunto di Δ, cioè al sistema (13). Ma V è sistema completo, dunque tale sarà anche (13), e perciò (v. pag. 303) Δ diventa completamente integrabile.

Possiamo dunque dire:

Quando la matrice (19) *ha per caratteristica 2, allora l'equazione pfaffiana data è completamente integrabile.*

Un altro problema importante relativo alla teoria invariantiva delle equazioni pfaffiane, è quello della ricerca della più generale trasformazione infinitesima che lasci invariata una siffatta equazione, ma noi non crediamo conveniente, per lo scopo del presente lavoro, di entrare in ulteriori particolari.

Ci limiteremo solo a indicare qui la serie dei principali lavori relativi a questa teoria.

Essa fu cominciata a trattare, a prescindere da altri tentativi precedenti di Eulero e di Monge, da Pfaff (*Abh. d. Berl. Ak.*, 1814-15, pag. 76), collo scopo di servirsene per il problema dell'integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine, problema cui quella teoria è intimamente congiunta.

Il cosidetto problema di Pfaff consiste nella integrazione di una equazione ai differenziali totali di primo ordine, con un numero *minimo* di integrali, e dalla risoluzione di un tal problema dipende quella delle equazioni a derivate parziali di primo ordine. Si trova che, supposta μ la caratteristica della matrice (19), questo numero minimo di integrali è $\frac{\mu}{2}$, se μ è pari, $\frac{\mu+1}{2}$, se μ è dispari; il che corrisponde a dire che la data forma differenziale può sempre, con una trasformazione di variabili, ridursi a contenere rispettivamente $\frac{\mu}{2}$ o $\frac{\mu+1}{2}$ termini. La ricerca di questi dipende poi dall'integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

I lavori di Jacobi, succeduti a quelli di Pfaff, gettarono una gran luce sull'argomento, e fecero molto progredire questa teoria (*Crelle*, 2, pag. 317 e 347; 17, pag. 97).

Altri lavori importanti furono quelli di Natani (*Crelle*, 58, pag. 301), Clebsch (*Crelle*, 59, pag. 190; 60, pag. 193; 61, pag. 146; 65, pag. 257), Grassmann (*Die Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862), Frobenius (*Crelle*, 82, pag. 230; 86, pag. 1 e 54), Mayer (*Math. Ann.*, 5, pag. 448; 17, pag. 523), Darboux (*Bull. des Sciences math.* (2), 6, pag. 14 e 49; *Compt. Rend.*, 94, pag. 835).

Dal punto di vista della teoria delle trasformazioni, e degli invarianti, sono fondamentali i molteplici lavori di Lie (p. es. *Soc. delle Scienze di Christiania*, 1873, pag. 320; *Arch. for Math. og*

Naturv., 2, pag. 338; *Leipz. Berichte*, 1896, pag. 405), MAYER (*cit.* e *Math. Ann.*, 6, pag. 162 e 192; 8, pag. 313; 12, pag. 132, ecc.), ENGEL (*Leipz. Berichte*, 1889, pag. 157; 1890, pag. 192; 1896, pag. 413; 1899, pag. 296), ED. V. WEBER (*Leipz. Berichte*, 1898, pag. 207, ecc.).

Per una esposizione della teoria citeremo il libro di FORSYTH (*Th. of Different. Equat.* I, Cambridge, 1890, tradotto in tedesco da H. MASER, Leipzig, 1893), e il libro recente di ED. V. WEBER (*Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig, 1900), alla fine del quale c' è anche una lista completa di tutti i lavori sull'argomento.

Le ricerche analoghe per il caso dei differenziali di 2.° ordine e di ordine superiore sono state intraprese da me negli ultimi due anni, e i lavori che vi si riferiscono sono pubblicati in *Compt. Rend. de l'Ac. de Paris*, t. 130, 1900; *Math. Ann.*, t. 54; *Rend. Ist. Lomb.* (2), t. 33, 1900, pp. 287, 675; t. 34, 1901, p. 563, 1180; t. 35, 1902, p. 244, 691; *Ann. di Mat.* (3), t. 7; *Rend. Acc. Lincei* (5), t. 11, 1902, 2° sem.

§ 5. INVARIANTI DIFFERENZIALI RELATIVI AD UN GRUPPO DATO. PARAMETRI DIFFERENZIALI.

Nei §§ 1 e 2 del Cap. II abbiamo stabilito i fondamenti della teoria della invariantività di un sistema di funzioni e di un sistema di equazioni finite rispetto ad un dato gruppo di trasformazioni.

Ora se di un gruppo formiamo un ampliamento qualunque nei modi indicati nel § 5 del Cap. IV, e se di tali gruppi ampliati consideriamo una funzione invariante, o un *invariante*, diremo che questo è *un invariante differenziale relativo al gruppo primitivo.*

Questo è il concetto generale di invariante differenziale, quale fu introdotto da Lie (v. specialmente *Math. Ann.*, 24, pag. 537), e che in vari modi specializzato comprende, come casi particolari, quelli di cui si sono occupati da diversi punti di vista vari altri Autori.

Noi sappiamo (v. pag. 217) che un gruppo intransitivo (ed è sempre tale un gruppo in cui il numero r dei parametri sia inferiore a quello delle variabili) ammette sempre un certo numero di invarianti; ora dato un qualunque gruppo ad r parametri, si potrà fare sempre un tale ampliamento (di 1°, 2°... ordine) che il numero delle variabili del gruppo ampliato riesca superiore a quello dei parametri, e quindi che il gruppo ampliato riesca intransitivo. Si vede così che possiamo *sempre trovare infiniti invarianti differenziali relativi ad un gruppo dato;* e poichè d'altra parte gli invarianti possono trovarsi con soli processi di eliminazione quando sono conosciute le formole di trasformazione del gruppo (v. Cap. III, § 1), così è manifesto che *gli invarianti differenziali di un gruppo potranno sempre trovarsi senza integrazione.*

Se il gruppo che si considera è un gruppo proiettivo (v. Cap. I, § 3), gli invarianti differenziali si dicono *invarianti differenziali proiettivi.*

Se ora di un gruppo ampliato invece di considerare le *funzioni invarianti*, consideriamo i *sistemi di equazioni invarianti*, allora, invece di avere gli invarianti differenziali relativi al gruppo dato, si otterranno dei *sistemi di equazioni differenziali* che restano invariati per le trasformazioni di esso, che cioè *ammettono* le trasformazioni del gruppo dato. Si ha così il mezzo di applicare la teoria delle trasformazioni a quella delle equazioni differenziali, e ricavarne importanti vantaggi.

Uno dei primi esempi di invarianti differenziali è quello incontrato da H. A. Schwarz, nelle sue ricerche sulle superficie minime (*Abhand. d. Berlin. Akad.*, 1871; *Opere*, Berlin, 1890, vol. 2, pag. 351). Esso è:

$$J = \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Il gruppo a cui è relativo questo invariante differenziale è quello delle trasformazioni:

$$x' = x$$
$$y' = \frac{a + by}{c + dy};$$

è infatti facile a verificare che calcolando le derivate di y' rispetto ad x', e formando con esse una espressione come J, si ha un risultato esattemente eguale ad J.

Essendo *proiettivo* il gruppo cui appartiene J, questo è un invariante differenziale proiettivo.

La espressione J gode della notevole proprietà che scambiando x con y, esso resta inalterata, a meno di un fattore che è:

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

In effetti:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

donde si trova:

$$J=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Per questa proprietà J fu chiamato *reciprocante* da Sylvester, il quale estese poi questa denominazione a tutti gli invarianti differenziali proiettivi.

Fra gli invarianti differenziali sono stati specialmente studiati i proiettivi per dedurne belle applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari, a quella delle curve, ecc. I lavori più notevoli su ciò sono quelli di Brioschi (*Ann. di Mat.*, (2), 13; *Acta Math.*, 14), di Sylvester

(*Amer. Journal of Math.*, 8 e 10), e specialmente quelli di Halphen (*Thèse sur les invariants différentielles*, 1878, e *Journal de l'École Polyt.*, cahier 47, 1880; *Comptes Rendus*, 81, 1875, 2° sem.; *Journal de Liouville*, 1876, 1880, 1883; *Acta Math.*, 3).

Supponiamo che il gruppo fondamentale di cui vogliamo considerare gli invarianti differenziali, sia formato nella seguente maniera. Sia assegnata una forma differenziale quadratica:

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} z_{rs}\, d\, x_r\, d\, x_s\,, \tag{1}$$

in cui le z sieno delle funzioni delle x, e immaginiamo operata una qualunque trasformazione di variabili; la forma (1) diventi:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} z'_{hk}\, d\, x'_h\, d\, x'_k\,,$$

in cui le z' saranno delle funzioni lineari delle z con coefficienti che sono funzioni delle x, facili a trovarsi, e propriamente:

$$z'_{hk} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} z_{rs} \frac{\partial\, x_r}{\partial\, x'_h} \frac{\partial\, x_s}{\partial\, x'_k}. \tag{2}$$

Ora consideriamo l'insieme dellè variabili x, z, immaginando le prime sottoposte a delle trasformazioni qualunque, e le seconde alle trasformazioni (2); è evidente che la forma differenziale (1) resta inalterata; e perciò se di trasformazioni

di questa specie ne consideriamo un gruppo, abbiamo un gruppo di trasformazioni delle x e z nelle x' e z', per cui la forma (1) resta inalterata.

Di un tal gruppo, considerando le z funzioni delle x, possiamo costruire dei gruppi ampliati, giusta la teoria esposta nel § 5 del Cap. IV, e considerare quindi degli invarianti differenziali relativi ad essi; si avranno delle funzioni delle x, delle z, e delle derivate di queste, le quali restano invariate quando, operando quelle speciali trasformazioni delle x, costituenti il gruppo assegnato, resti invariata la forma differenziale (1).

Si potrebbe prendere la cosa da un punto di vista più ampio, in luogo cioè di assegnare uno speciale gruppo di trasformazioni per le x, immaginare l'assieme di tutte le trasformazioni possibili, e questo, insieme alle corrispondenti trasformazioni (2) per le z, darebbe la totalità di tutte le trasformazioni che lasciano inalterata (1); se ora costruiamo di tal gruppo un invariante differenziale contenente, per maggiore generalità, anche una o più funzioni arbitrarie delle x e le derivate di esse, abbiamo il concetto generale di *parametro differenziale* relativo alla forma (1).

Si vede dunque che la teoria dei parametri differenziali può considerarsi scaturire direttamente da quella degli invarianti differenziali; essa però si è sviluppata indipendentemente da quella, e la sua prima origine si trova nelle ricerche di Gauss sulla curvatura totale delle superficie, e negli studi di Lamé a cui si deve anche la denominazione di *parametro differenziale.*

Noi però non entreremo nei particolari di questa teoria, su cui ci basti il cenno che ne abbiamo dato; aggiungeremo solo che i lavori più importanti in questo ordine di studi, sono stati, oltre quelli citati di GAUSS, e di LAMÉ (*Leçons sur les coord. curvilignes*, Paris, 1859), quelli di JACOBI (*Crelle*, 36), BELTRAMI (*Mem. Acc. Bologna*, (2), 8, 1869), CHRISTOFFEL (*Crelle*, 70), LIPSCHITZ (*Crelle*, 70, 71, 72, 74, 78, 81), RICCI (*Ann. di Mat.*, (2), 12, 14; *Rend. Lincei*, 1888-89; *Atti Istituto Veneto*, 1893, ecc.), FROBENIUS (*Crelle*, 110), KNOBLAUCH (*Crelle*, 111), ecc.

NOTE ED AGGIUNTE.

Pag. 11.

Sui parametri essenziali. — Devo al chiar. mio amico Prof. Luigi Bianchi la seguente comunicazione sul criterio per riconoscere se i parametri $a_1 \ldots a_r$ sono o no *essenziali*.

Si formi la matrice:

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_r} \end{matrix} \right\|,$$

indi l'altra M_1 formata nello stesso modo, ma aggregando ad $f_1, \ldots f_n$ anche tutte le loro derivate prime rispetto ad $x_1, \ldots x_n$; indi la matrice M_2 ottenuta coll'aggregare alle $f_1 \ldots f_n$, tutte le loro derivate prime e tutte le loro derivate seconde rispetto alle x; e così di seguito.

Le caratteristiche $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ di queste matrici sono tutte non maggiori di r, e si ha:

$$\mu \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots\ldots \leqq r.$$

Vi sarà un punto in cui la serie delle μ diventa per necessità *stazionaria*.

I parametri sono o no essenziali secondochè il massimo ρ *dei numeri* μ *è eguale o minore di* r.

Questo criterio è una trasformazione di quello di Lie da noi sviluppato nelle pag. 10-11 del testo. Infatti il criterio di Lie potrebbe prima di tutto essere modificato così: in luogo di assumere altri valori x'' diversi dagli x' e costruire per essi le equazioni (4) di pag. 10, si formino le derivate delle (4) rispetto ad $x_1 \ldots x_n$ e vi si sostituiscano per φ le $f_1 \ldots f_n$ e per le x i medesimi valori x'; ciò corrisponde in certo modo ad assumere le x'', una ad una, infinitamente prossime alle x'.

Similmente si formino le derivate seconde delle (4), e così di seguito.

Tutte queste equazioni devono coesistere; se fra esse se ne può trovare r di indipendenti, il che avverrà quando una delle matrici M, M_1, M_2,... ha per caratteristica r, allora le α_k risultano zero, e i parametri sono essenziali; non lo sono nel caso opposto.

Pag. 74.

Sulle parentesi di Poisson. — È necessario dire qualcosa per giustificare la denominazione di *parentesi di Poisson* data alle $(X_i X_j)$, giacchè a prima vista potrebbe parere che le *parentesi di Poisson* abbiano una definizione molto diversa. Ed

infatti immaginando due funzioni f, φ di due serie di variabili $x_1 \ldots x_n\ p_1 \ldots p_n$, la *parentesi di Poisson* è:

$$(f, \varphi) = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} \right).$$

Ora la nostra denominazione può giustificarsi pienamente dal fatto che il simbolo $(X_i X_j) f$ non è altro che una vera parentesi di Poisson applicata alle due funzioni:

$$X_i f = \xi_{i1} p_1 + \ldots + \xi_{in} p_n$$
$$X_j f = \xi_{j1} p_1 + \ldots + \xi_{jn} p_n,$$

dove le $p_1 \ldots p_n$ sono le derivate parziali di 1° ordine di f.

Formando infatti $(X_i f, X_j f)$ si ha:

$$\sum_s \left[\sum_r \left(\xi_{ir} \frac{\partial \xi_{js}}{\partial x_r} - \xi_{jr} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial x_r} \right) \right] p_s,$$

cioè:

$$\sum_s \left[X_i \xi_{js} - X_j \xi_{is} \right] \frac{\partial f}{\partial x_s},$$

che è precisamente:

$$(X_i X_j) f;$$

possiamo dunque scrivere:

$$(X_i f, X_j f) = (X_i X_j) f,$$

formola che giustifica la denominazione adoperata.

Pag. 75.

Identità ricavate da quella di Jacobi. — Sia Z il simbolo di un' altra trasformazione infinitesima, e adoperiamo il simbolo della formola (7) di pagina 79; l'identità di Jacobi può scriversi:

$$(Z X_1 X_2) = -(X_1 X_2 Z) + (X_2 X_1 Z).$$

Riapplicando questa stessa formola si ha:

$$(Z X_1 X_1 X_2) = -(X_1 (X_1 X_2) Z) + ((X_1 X_2) X_2 Z) =$$
$$= -(X_1 X_1 X_2 Z) + 2(X_1 X_2 X_1 Z) - (X_2 X_1 X_1 Z).$$

$$(Z X_1 X_1 X_1 X_2) = -(X_1 (X_1 X_1 X_2) Z) +$$
$$+ ((X_1 X_1 X_2) X_1 Z) =$$
$$= -(X_1 X_1 X_1 X_2 Z) + 3(X_1 X_1 X_2 X_1 Z) -$$
$$- 3(X_1 X_2 X_1 X_1 Z) + (X_2 X_1 X_1 X_1 Z).$$

e in generale:

$$\Big(Z \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu} X_2\Big) =$$
$$= -\Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu} X_2 Z\Big) + \binom{\nu}{1}\Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu-1} X_2 X_1 Z\Big) -$$
$$- \binom{\nu}{2}\Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu-2} X_2 X_1 X_1 Z\Big) + \ldots\ldots \qquad (1)$$
$$= -\sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r}\Big(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu-r} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{r} Z\Big).$$

Di questa identità mi sono giovato in una Nota: *Altre ricerche sulla formola del prodotto, etc.* Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, p. 555.

Pag. 79.

Sui numeri Bernoulliani. — Nelle pag. 78-79 abbiamo introdotto i numeri $\gamma', \gamma'' \ldots$, e abbiamo detto che essi hanno una facile relazione coi *numeri Bernoulliani*, e che i γ di indice dispari (meno γ') sono zero. Passiamo ora a dimostrare queste asserzioni, e a comunicare i risultati contenuti in una mia recente Nota (*Sopra i numeri Bernoulliani*, Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, p. 377), e che possono poi servire per dare una dimostrazione, diversa dall' ordinaria, del terzo teorema di Lie (v. p. 139 e più avanti p. 345).

I numeri $\gamma', \gamma'', \gamma''' \ldots$ sono legati dalla seguente formola di ricorrenza:

$$\gamma^{(s)} + \frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{s!}\gamma' + \frac{1}{(s+1)!} = 0, \tag{1}$$

la quale, essendo $\gamma' = -\frac{1}{2}$, può anche scriversi:

$$\gamma^{(s)} + \frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(s-1)!}\gamma'' - \frac{s-1}{2(s+1)!} = 0. \tag{2}$$

Questi numeri, si può far vedere, hanno un rapporto semplice coi numeri Bernoulliani, * i quali sono i coefficienti B_2, $B_4, \ldots$ dello sviluppo in serie di potenze della funzione pari:

$$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_2\frac{x^2}{2!} - B_4\frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots \quad (3)$$

Se infatti poniamo il primo membro di (3) eguale a:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots \quad (4)$$

dove le c sieno dei coefficienti indeterminati, se poi moltiplichiamo primo e secondo membro per $e^x - 1$, sostituiamo a e^x il suo sviluppo e paragoniamo i coefficienti delle stesse potenze di x al primo e secondo membro, si trova per le c la formola di ricorrenza:

$$c_s + \frac{1}{2!}c_{s-1} + \frac{1}{3!}c_{s-2} + \ldots + \frac{1}{s!}c_1 + \frac{1}{(s+1)!} = \frac{1}{2 \,.\, s!}$$

$$c_1 = 0,$$

e quindi anche:

$$c_s + \frac{1}{2!}c_{s-1} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}c_2 - \frac{s-1}{2(s+1)!} = 0, \quad (5)$$

donde si vede che i coefficienti c, a cominciare da quello di indice 2 in poi, soddisfanno ad una

---

* Per maggiori particolari su questi rimandiamo all'Opera di SAALSCHÜTZ, *Vorl. über die Bernoulli'schen Zahlen*, Berlin, 1893, e al Cap. 18, § 3, del mio *Repertorio di Matematiche Superiori*, I, (*ediz. italiana*, Milano, 1898; *ediz. tedesca*, Leipzig, 1900).

formola di ricorrenza simile a quella cui soddisfanno le γ'', γ''', ... e perciò possiamo dedurre che in generale:

$$\gamma^{(s)} = c_s , \tag{6}$$

ed essendo poi evidentemente il primo membro di (3) una funzione *pari*, e quindi essendo zero tutte le c di indice dispari, ne viene che *sono zero tutte le* γ *di indice dispari* (*meno* γ'); dal paragone di (4) con (3) e (6) si ha inoltre:

$$\gamma^{(2n)} = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2n!} . \tag{7}$$

La formola di ricorrenza (2) si trasforma facilmente in una formola di ricorrenza fra i numeri Bernoulliani B, ed è facile riconoscere che si ottiene così la formola detta di Moivre (v. *Repertorio,* I, ed. ital., pag. 489; ed. ted., pag. 472).

Coll'introduzione dei numeri γ, la formola (3) diventa:

$$\frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \gamma'' x^2 + \gamma^{\text{IV}} x^4 + \ldots ,$$

mentre poi ricordando la formola di sviluppo in serie di potenze di $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ (v. *Repertorio*, I, ed. it., p. 149; ed. ted., p. 322), si ha anche:

$$\frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1 - \gamma'' x^2 + \gamma^{\text{IV}} x^4 - \gamma^{\text{VI}} x^6 + \ldots ,$$

la quale può anche ricavarsi dalla precedente ponendo $i\,x$ in luogo di x.

Tenendo poi conto dell'annullarsi delle γ di indice dispari, la relazione di ricorrenza (2) dà le due formole:

$$\gamma^{(2n)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(2n-2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!}\gamma'' - \frac{2n-1}{2(2n+1)!} = 0$$

$$\frac{1}{2!}\gamma^{(2n)} + \frac{1}{4!}\gamma^{(2n-2)} + \ldots + \frac{1}{2n!}\gamma'' - \frac{n}{(2n+2)!} = 0.$$

Le principali relazioni che sussistono fra i numeri Bernoulliani, e che costituiscono altrettante formole di ricorrenza fra i medesimi, sono in primo luogo quelle di primo grado, e poi quelle di secondo grado, nelle quali ultime *la somma degli indici dei due fattori di ciascun termine sia sempre costante;* le prime, espresse nelle γ, sono della forma:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(2n-1)!}\gamma'' + \frac{\alpha_2}{(2n-3)!}\gamma^{\mathrm{IV}} + \ldots +\\ + \frac{\alpha_{n-1}}{3!}\gamma^{(2n-2)} + \frac{\alpha_n}{1!}\gamma^{2n} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

e le seconde sono della forma:

$$\left.\begin{aligned}\beta_0 + \beta_1\gamma''\gamma^{(2n-2)} + \beta_2\gamma^{\mathrm{IV}}\gamma^{(2n-4)} + \ldots +\\ + \beta_{n-1}\gamma^{(2n-2)}\gamma'' + \beta_n\gamma^{(2n)} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

le α e le β essendo dei coefficienti numerici.

Di quelle della seconda specie ne sono conosciute alcune, e sono notate a pag. 15-17 della sovracitata Opera di SAALSCHÜTZ, e una delle più semplici di esse è quella che, trasformata nelle γ, diventa:

$$\left.\begin{aligned}\gamma''\gamma^{(2n-2)} + \gamma^{\mathrm{IV}}\gamma^{(2n-4)} + \ldots + \gamma^{(2n-2)}\gamma'' +\\ + (2n+1)\gamma^{(2n)} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

La classe di identità cui vogliamo ora accennare, e che, come abbiamo detto in principio, trova la sua applicazione nella dimostrazione del *terzo teorema di* Lie (v. pag. 345), ha appunto per prima rappresentante la (10); la loro forma generale non si presenta però con una legge abbastanza semplice, se non introduciamo certe altre espressioni che chiameremo Γ e che sono di 2^o grado nelle γ. Poniamo:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^{(2n)}_{1,1} &= +\sum_{\nu=1}^{n-1} \gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)} - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{2,1} &= -\sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{2\nu}{1} \gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)} - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{3,1} &= +\sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{2\nu}{2} \gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)} - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{4,1} &= -\sum_{\nu=2}^{n-1} \binom{2\nu}{3} \gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)} - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{5,1} &= +\sum_{\nu=3}^{n-1} \binom{2\nu}{4} \gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)} - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{6,1} &= -\sum_{\nu=3}^{n-1} \binom{2\nu}{5} \gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)} - \gamma^{(2n)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{2n-1,1} &= \qquad\qquad\qquad - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{2n,1} &= \qquad\qquad\qquad - \gamma^{(2n)}
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

e inoltre:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^{(2n)}_{k,2} &= \Gamma^{(2n)}_{1,1} + \Gamma^{(2n)}_{2,1} + \ldots\ldots + \Gamma^{(2n)}_{k,1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{k,s} &= \Gamma^{(2n)}_{1,s-1} + \Gamma^{(2n)}_{2,s-1} + \ldots\ldots + \Gamma^{(2n)}_{k,s-1}
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Stabilite queste apposizioni, *le relazioni cui alludo sono tutte della seguente semplice forma:*

$$\left.\begin{array}{l}
\Gamma^{(2n)}_{1,1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-3,1} + \Gamma^{(2n)}_{2n-2,1} + \Gamma^{(2n)}_{2n-1,1} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = 0 \\
\Gamma^{(2n)}_{1,2} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-3,2} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n-2,2} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{1,k} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-2k+1,k} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n-2k+2,k} = 0 \\
\Gamma^{(2n)}_{1,n} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2,n} = 0,
\end{array}\right\} \quad (13)$$

di cui quelle contenute nella 2ª, 3ª,... linea possono naturalmente, mediante le relazioni (12), esprimersi tutte mediante le Γ aventi per secondo indice 1, cioè mediante le Γ della tabella (11), e si hanno allora le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{2n-1} \Gamma^{(2n)}_{r,1} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = 0 \\
\sum_{r=1}^{2n-2} (2n-r)\,\Gamma^{(2n)}_{r,1} = 0 \\
\sum_{r=1}^{2n-4} \left[\binom{2n-r-1}{2} - 1\right] \Gamma^{(2n)}_{r,1} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{r=1}^{2n-2k} \left[\binom{2n-r-k+1}{k} - \binom{2n-r-k-1}{k-2}\right] \Gamma^{(2n)}_{r,1} = 0. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (14)$$

La prima e la seconda di queste relazioni si riducono alla (10); in effetti sommando tutte le Γ della tabella (11), aggiungendo poi ancora $-\gamma^{(2n)}$, e ricordando che:

$$\binom{2k}{0}-\binom{2k}{1}+\binom{2k}{2}-\ldots-\binom{2k}{2k-1}=-1,$$

si vede a colpo d'occhio che la prima delle (14) si riduce alla (10). In quanto alla seconda delle (14), basta ricordare che: *

$$(2n-1)\binom{2k}{0}-(2n-2)\binom{2k}{1}+\ldots\ldots+$$
$$+(2n-2k)\binom{2k}{2k-1}=-(2n-2k-1),$$

e allora essa diventa:

$$-(2n-3)\gamma''\gamma^{(2n-2)}-(2n-5)\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-1\,.\,\gamma^{(2n-2)}\gamma''-\left[\binom{2n}{2}-1\right]\gamma^{(2n)}=0,$$

che può scriversi, spostando opportunamente i termini simili:

$$-(n-1)[\gamma''\gamma^{(2n-2)}+\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+\ldots\ldots+$$
$$+\gamma^{(2n-2)}\gamma''+(2n+1)\gamma^{(2n)}]=0,$$

il che mostra che essa è identica alla (10).

---

* Il teorema detto di ARNDT (Crelle, 31, p. 239), che però può attribuirsi anche al CAUCHY, dice che se $a_0, a_1, a_2 \ldots$ formano una progressione aritmetica di ordine minore di n, è sempre:

$$\binom{n}{0}a_0-\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}a_2-\ldots\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a_n=0.$$

Le altre fra le relazioni (14) non si possono ridurre alla (10); servendosi della stessa formola citata a piè della pagina precedente si trova che la terza è:

$$\left[\binom{2n-4}{2}-1\right]\gamma''\gamma^{(2n-2)}\left[\binom{2n-6}{2}-1\right]\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+$$

$$+\ldots\ldots+\left[\binom{2}{2}-1\right]\gamma^{(2n-4)}\gamma^{IV}+\left[\binom{0}{2}-1\right]\gamma^{(2n-2)}\gamma''+$$

$$+(2n-3)\gamma^{(2n-2)}\gamma''+\left[\binom{2n-1}{3}-\binom{2n-3}{1}\right]\gamma^{(2n)}=0,$$

e la quarta è:

$$\left[\binom{2n-5}{3}-\binom{2n-7}{1}\right]\gamma''\gamma^{(2n-2)}+$$

$$+\left[\binom{2n-7}{3}-\binom{2n-9}{1}\right]\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+\ldots\ldots+$$

$$+\left[\binom{-1}{3}-\binom{-3}{1}\right]\gamma^{(2n-2)}\gamma''+(2n-3)(n-4)\gamma^{(2n-2)}\gamma''+$$

$$+\left[\binom{2n-2}{4}-\binom{2n-4}{2}\right]\gamma^{(2n)}=0.$$

Pag. 84-85-86.

Sul prodotto di due trasformazioni. — Non è ben chiaro il modo di eliminazione delle x' fra le (1), e anzi perchè il risultato ottenuto sia esatto è necessario che le (1) si scrivano così:

$$\left.\begin{array}{ll}(S) & x''_i = e^{tX_1'}x'_i \\ (T) & x'_i = e^{t'X_2}x_i\end{array}\right\} \quad (1)$$

e che quindi si faccia il prodotto $S\,T$ (con questo simbolo si intenda operata *prima* la T e *poi* la S, v. pag. 4) e non il prodotto $T\,S$.

Nella S la trasformazione infinitesima X_1 si deve intendere naturalmente scritta nelle variabili x' e non nelle x, ed è per indicar ciò che si è scritto X_1'.

Per eliminare le x' può procedersi nel seguente modo: Un termine qualunque del secondo membro di S è (sviluppando l'esponenziale):

$$\frac{t^r}{r\,!} X_1'^r x'_i\,;$$

ora questa funzione delle x', in virtù della formola generale (3) di pag. 59, e della trasformazione T, può scriversi $\left(\text{trascurando } \frac{t^r}{r\,!}\right)$:

$$X_1'^r x'_i = X_1^r x_i + \frac{t'}{1\,!} X_2 X_1^r x_i + $$

$$+ \frac{t'^2}{2\,!} X_2^2 X_1^r x_i + \ldots$$

dunque il prodotto $S\,T$ può scriversi:

$$x''_i = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^r}{r\,!} \frac{t'^s}{s\,!} X_2^s X_1^r x_i\,,$$

che è precisamente la formola di pag. 85-86.

È bene notare che mentre nel prodotto $S\,T$ si intende operata *prima* la trasformazione T e *poi* la S, nei vari termini della precedente formola,

il simbolo infinitesimale che si deve intendere applicato *prima* è X_1, e non X_2, cioè quello relativo ad S, non quello relativo a T.

Pag. 135.

Alle righe 8, 9 e 13 il segno dei termini in $(Z_2 Z_1 Z_2)$ e $(Z_1 Z_2 Z_1 Z_2)$ deve essere il —, non il +.

Pag. 139.

Sul terzo teorema di Lie. — A completare la trattazione contenuta nel testo accennerò brevemente alla dimostrazione del terzo teorema di Lie, che io ho pubblicata recentemente nei *Rend. dell'Ist. Lomb.* (2), t. 35, p. 419.

Poniamo, per brevità:

$$\sum_{s_1 s_2 \ldots} \cdots \sum_{s_{m-1}} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s_2} \ldots c_{t_m s_{m-1} h} = (t_1 t_2 \ldots t_m ; k h) =$$
$$= -(k t_2 \ldots t_m ; t_1 h),$$

e inoltre:

$$((s t_1 \ldots t_m ; k h)) = (s t_1 \ldots t_m ; k h) +$$
$$+ (t_1 s t_2 \ldots t_m ; k h) + \ldots\ldots + (t_1 t_2 \ldots t_m s ; k h).$$

Colla prima di queste due apposizioni i singoli elementi c_{tks} possono denotarsi col simbolo, alle volte più comodo, $(t ; k s)$.

È facile vedere che sussistono le identità:

$$(t_1 \ldots t_m ; k\, h) = \sum_{s=1}^{r} (t_1 \ldots t_\nu ; k\, s)\,(t_{\nu+1} \ldots t_m ; s\, h),$$

$$(t_1 \ldots t_\nu\, k'\, t_{\nu+1} \ldots t_m ; k\, h) =$$

$$= - \sum_{s=1}^{r} (t_1 \ldots t_\nu ; k\, s)\,(s\, t_{\nu+1} \ldots t_m ; k'\, h).$$

Si dimostra inoltre che *se i numeri c soddisfanno alle due relazioni* (2) (3) *di pag. 137-138, soddisferanno anche alle seguenti altre relazioni più complicate:*

$$\sum_{t_1 \ldots t_m} (t_1 \ldots t_m\, k' ; k\, h)\, u_{t_1} \ldots u_{t_m} +$$

$$+ \sum_{t_1 \ldots t_m} \sum_{s} \Big\{ (t_1 \ldots t_{m-1}\, s ; k\, h) +$$

$$+ (t_1 \ldots t_{m-2}\, s\, t_{m-1} ; k\, h) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (t_1\, s\, t_2 \ldots t_{m-1} ; k\, h) \Big\} (t_m ; k'\, s)\, u_{t_1} \ldots u_{t_m} =$$

$$= \sum_{t_1 \ldots t_m} (t_1\, k'\, t_2 \ldots t_m ; k\, h)\, u_{t_1} \ldots u_{t_m}\,.$$

dove il $\sum\limits_{t_1 \ldots t_m}$ si intende esteso a tutti i valori 1, 2,... r degli indici $t_1 \ldots t_m$, e le $u_1 \ldots u_r$ rappresentano delle variabili qualunque.

Indicando poi con S_t l'operazione di sommare tutte le espressioni ottenute da una data permutando fra loro in tutti i modi possibili gli indici $t_1\, t_2 \ldots$ che vi compariscono, e con $S'_{kk'}$ l'operazione del sottrarre da una data espressione, dipendente dagli indici k, k', quella ottenuta scam-

biando fra loro tali due indici, *la seconda relazione che è conseguenza delle solite* (2), (3) *di pag. 137-138 si esprime:*

$$S'_{kk'}\, S_t \Big\{ \gamma''\, \gamma^{(2n-2)} \sum_s (t_1 \ldots t_{2n-2}; k\, s)\, ((s\, t_{2n-1}; k'\, h)) +$$
$$+ \gamma^{IV}\, \gamma^{2n-4} \sum_s (t_1 \ldots t_{2n-4}; k\, s)\, ((s\, t_{2n-3}\, t_{2n-1}\, t_{2n-1}; k'\, h)) +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \gamma^{(2n-2)}\, \gamma'' \sum_s (t_1\, t_2; k\, s)\, ((s\, t_3 \ldots t_{2n-1}; k'\, h)) +$$
$$+ \gamma^{(2n)}\, ((k\, t_1 \ldots t_{2n-1}; k'\, h)) \Big\} = 0\,,$$

in cui le γ sono quei numeri, affini ai Bernoulliani, di cui abbiano trattato di sopra (v. pag. 336).

Stabilite queste relazioni si può passare a dare un cenno della dimostrazione del terzo teorema di Lie. Farò vedere direttamente come, dato un sistema di costanti di struttura, si possono costruire delle formole le quali sono quelle delle trasformazioni infinitesime di *un gruppo*, solo che si supponga che le suddette costanti sieno legate dalle relazioni (2), (3) di pag. 137-138.

Anche nella dimostrazione di Schur si costruiscono similmente le trasformazioni infinitesime di un gruppo, date che sieno le costanti c_{ijs}, ma il mio procedimento si differenzia sostanzialmente da quello di Schur, essendo esso fondato in gran parte sulle identità ricordate di sopra, la seconda delle quali è, a sua volta, fondata sulle identità fra i numeri Bernoulliani di cui abbiamo trattato a pag. 341. La mia dimostrazione così è più diretta e si riduce ad una di natura, in certo modo,

elementare, non presupponendo alcun' altra nozione sulla teoria dei gruppi se non il *secondo teorema di* LIE.

Dato un sistema di r^3 numeri c_{ijs} soddisfacenti alle relazioni (2), (3) di pag. 137-138, assunte $u_1\, u_2 \ldots u_r$ come variabili, formiamo le seguenti trasformazioni infinitesime:

$$U_k = \sum_{h=1}^{r} \Big[\varepsilon_{kh} - \gamma' \sum_{t_1} c_{t_1 kh}\, u_{t_1} + \qquad (1)$$
$$+ \gamma'' \sum_{t_1 t_2 s_1} c_{t_1 k s_1}\, c_{t_2 s_1 h}\, u_{t_1} u_{t_2} + \ldots\ldots \Big] \frac{\partial}{\partial u_h}$$

dove $\varepsilon_{hk} = 0$ se h è diverso da k, ed è eguale ad 1 se $h = k$, e il termine generale della serie racchiusa nelle parentesi è:

$$\gamma^{(2n)} \sum_{t_1 t_2 \ldots} \sum_{s_1 s_2 \ldots} c_{t_1 k s_1}\, c_{t_2 s_1 s_2}\, c_{t_3 s_2 s_3} \ldots c_{t_{2n} s_{2n-1} h}\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}}. \qquad (2)$$

Si può sempre facilmente trovare un campo di valori delle u, in cui la predetta serie (che è una serie di potenze) è convergente.

Sia infatti C il valore assoluto di quella fra le c che abbia il massimo valore assoluto, e formiamo la serie:

$$\varepsilon_{kh} - \gamma' r\, C M + \gamma'' r^3 C^2 M^2 + \gamma^{\text{IV}} r^7 C^4 M^4 + \qquad (3)$$
$$+ \ldots\ldots + \gamma^{(2n)} r^{4n-1} C^{2n} M^{2n} + \ldots\ldots$$

Ricordiamo che per i numeri Bernoulliani B_{2n} sussiste la relazione (v. mio *Repertorio*, I; ediz. ital., pag. 489; ed. ted., p. 472):

$$\lim_{n=\infty} B_{2n} \left(\frac{\pi e}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e},$$

per modo che sostituendo a B_{2n} la sua espressione mediante $\gamma^{(2n)}$ (v. pag. 338), e facendo poi il rapporto di due γ consecutive, si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma^{(2n)}}{\gamma^{(2n-2)}} \frac{2\,n!}{(2\,n-2)!} (\pi\, e)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \frac{1}{(n-1)^2} = 1\,,$$

ed essendo:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = e^{-2}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{2\,n!}{(2\,n-2)!} \frac{1}{(n-1)^2} = 4,$$

si ha infine:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma^{(2n)}}{\gamma^{(2n-2)}} = \frac{1}{4\,\pi^2}.\ * \tag{4}$$

Prendendo dunque:

$$M < \frac{2\pi}{r^2\, C}\,, \tag{5}$$

si ottiene il campo di convergenza della serie (3), e prendendo ciascuna delle $u_1 \ldots u_r$ minore di $\frac{2\pi}{r^2\, C}$, si ottiene evidentemente un campo in cui è convergente la serie di cui il termine generale è (2).

---

* A questo stesso risultato si giungerebbe colle formole contenute alla pag. 13 del libro di SAALSCHÜTZ citato a pag. 337: *Vorles. über die Bernoulli'schen Zahlen*, Berlin, 1893.

Ora io dico *che le trasformazioni infinitesime date dalle* (1) *sono atte a generare un gruppo ad r parametri, giacchè soddisfanno al secondo teorema di* LIE *ricordato in principio, e che inoltre la struttura del gruppo così generato è precisamente quella data dagli assegnati numeri c.*

Adoperando il simbolo $S'_{kk'}$ usato disopra (v. pag. 346), la parentesi $(U_k, U_{k'})$ formata colle due trasformazioni infinitesime U_k, $U_{k'}$, può scriversi:

$$(U_k, U_{k'}) =$$
$$= S'_{kk'} \sum_h \sum_s [\varepsilon_{ks} - \gamma' \sum_{t_1} c_{t_1 ks}\, u_{t_1} + \gamma'' \sum_{t_1 t_2 s_1} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s}\, u_{t_1} u_{t_2} + \ldots] \times$$
$$\times \left[-\gamma' c_{sk'h} + \gamma'' \sum_{t'_1 s'_1} (c_{t'_1 k s'_1} c_{s s'_1 h} + c_{s k s'_1} c_{t'_1 s'_1 h})\, u_{t'_1} + \ldots \right] \frac{\partial}{\partial u_h}$$

e se adoperiamo il simbolo introdotto a pag. 345 possiamo scrivere:

$$\left.\begin{aligned} (U_k, U_{k'}) = \sum_h S'_{kk'} \sum_s \Big[& \varepsilon_{ks} - \gamma' \sum_{t_1} (t_1 ; k\, s)\, u_{t_1} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \ldots t_{2n}} (t_1 \ldots t_{2n} ; k\, s)\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} \Big] \times \\ \times \Big[-\gamma' (s ; k'\, h) + & \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t'_1 \ldots t'_{2n-1}} & ((s\, t'_1 t'_2 \ldots t'_{2n-1} ; k' h))\, u_{t'_1} \ldots u_{t'_{2n-1}} \Big] \frac{\partial}{\partial u_h} , \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Sviluppiamo il prodotto delle due parentesi quadre e ordiniamo i termini secondo il loro grado nelle u. I termini di grado zero sono:

$$-2\gamma' (k\, k'\, h) = c_{kk'h} ,$$

$\left(\text{essendo } \gamma' = -\frac{1}{2}\right)$, che può scriversi:

$$\sum_s c_{kk's}\,\varepsilon_{sh}\,. \tag{7}$$

I termini di primo grado sono:

$$\gamma''\, S'_{kk'} \sum_{t'_1} \left\{ (t'_1\, k\, ;\, k'\, h) + (k\, t'_1\, ;\, k'\, h) \right\} u_{t'_1} +$$
$$+ \gamma'^2\, S'_{kk'} \sum_{t_1} \sum_s (t_1\, ;\, k\, s)\,(s\, ;\, k'\, h)\, u_{t_1}\,,$$

cioè:

$$\sum_t \left\{ \gamma'' \sum (c_{tk's}\, c_{ksh} - c_{tks}\, c_{k'sh}) + \right.$$
$$+ \gamma'' \sum_s (c_{kk's}\, c_{tsh} - c_{k'ks}\, c_{tsh}) +$$
$$\left. + \gamma'^2 \sum_s (c_{tks}\, c_{sk'h} - c_{tk's}\, c_{skh}) \right\} u_t\,,$$

ovvero, per effetto delle relazioni fra le c:

$$(3\,\gamma'' + \gamma'^2) \sum_t \sum_s c_{kk's}\, c_{tsh}\, u_t\,.$$

Ma:

$$3\,\gamma'' + \gamma'^2 = \frac{1}{2} = -\,\gamma',$$

dunque si ha:

$$\sum_s c_{kk's} \left(-\,\gamma' \sum_t c_{tsh}\, u_t \right). \tag{8}$$

I termini di grado $2n$ sono i seguenti:

$$- \gamma' \gamma^{(2n)} S'_{kk'} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} \Big[\sum_s ((s t_1 \dots t_{2n-1} ; k'h)) (t_{2n} ; k r) -$$
$$- (t_1 \dots t_{2n} k' ; k h) \Big] u_{t_1} \dots u_{t_{2n}}.$$

Effettuando lo scambio di k con k', dando al simbolo (( )) il suo valore, adoperando indi la formola di pag. 346, e osservando che (v. pag. 346):

$$\sum_s (s t_1 \dots t_{2n-1} ; k' h) (t_{2n} ; k s) =$$
$$= - (t_{2n} k' t_1 \dots t_{2n-1} ; k h),$$

e che, dovendo fare la somma rispetto a tutte le t, si può in un termine scambiare in un qualunque modo le t stesse, questa espressione diventa:

$$- 2 \gamma' \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} \Big\{ (t_1 k t_2 \dots t_{2n} ; k' h) -$$
$$- (t_1 k' t_2 \dots t_{2n} ; k h) \Big\} u_{t_1} \dots u_{t_{2n}}$$

che, per effetto della (3) di pag. 138, diventa:

$$- 2 \gamma' \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (k t_1 \dots t_{2n} ; k' h) u_{t_1} \dots u_{t_{2n}},$$

cioè:

$$\sum_s c_{kk'r} \Big\{ \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n} ; s h) u_{t_1} \dots u_{t_{2n}} \Big\} . \quad (9)$$

Passiamo infine ai termini di grado dispari $2n-1$.

Esaminando la formola (6), tenendo conto della possibilità dello scambio delle t fra loro, si vede

che il coefficiente di $u_{t_1} \ldots u_{t_{2n-1}}$ è esattamente, a meno di un fattore $\frac{1}{(2n-1)!}$ derivato dalla apposizione della S_t che nella formola (6) non compare, il primo membro della formola di pag. 347, *e quindi è zero.*

Raccogliendo i risultati ottenuti si ha:

$$(U_k, U_{k'}) = \sum_s c_{kk'r} \sum_h \Big[\varepsilon_{sh} - \gamma' \sum_t c_{tsh} u_t +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \ldots t_{2n}} (t_1 \ldots t_{2n}; s\,h)\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} \Big] \frac{\partial}{\partial u_h} =$$

$$= \sum_s c_{kk's} U_s ,$$

formola che dimostra che *le trasformazioni infinitesime U generano un gruppo e che questo gruppo ha precisamente la struttura assegnata.*

Pag. 208.

Gruppi semplici e composti. — Fra i sottogruppi invarianti di un dato sono da annoverarsi il gruppo stesso e il gruppo costituito dalla sola trasformazione identica.

Sull' esistenza dei sottogruppi invarianti è fondata una notevole distinzione dei gruppi, e cioè: un gruppo si dirà *semplice* se, oltre i due suindicati, non ha sottogruppi invarianti, e si dirà *composto* nell'altro caso.

Sui sottogruppi invarianti sono anche da notarsi i seguenti due teoremi facili a dimostrare:

Le trasformazioni comuni di due sottogruppi invarianti formano anche un sottogruppo invariante.

Due sottogruppi invarianti di un dato gruppo, che non hanno alcuna trasformazione infinitesima comune, sono tali che ogni trasformazione dell'uno è permutabile con ognuna dell'altra.

Pag. 211.

Gruppi derivati e gruppi integrabili. — Dato un gruppo generato dalle trasformazioni infinitesime $X_1 \dots X_r$, le trasformazioni $(X_i X_j)$ formano in generale *un sottogruppo del dato*, che si chiama il *gruppo derivato del dato*; similmente, costruendo il gruppo derivato di quello così ottenuto si ha il *secondo gruppo derivato del dato.* e così di seguito.

Dal teorema dimostrato nel testo risulta subito che: *il gruppo derivato di un sottogruppo invariante di un dato G_r, è anche sottogruppo invariante di G_r*, e perciò: *tutti i gruppi derivati di G_r sono sottogruppi invarianti di G_r medesimo.*

È evidente anche che se il gruppo derivato di G_r risulta della sola trasformazione identica, le trasformazioni infinitesime di G_r sono a due a due permutabili (v. p. 202), e inoltre se il gruppo derivato è identico a G_r, lo stesso avverrà per tutti gruppi derivati seguenti.

La serie dei gruppi derivati è naturalmente finita; dato G_r e formando i successivi gruppi derivati si trovi che il $(q+1)^{mo}$ gruppo derivato coincida col q^{mo}; allora può accadere o che questo q^{mo} gruppo derivato sia formato della sola trasformazione identica, ovvero che risulti anche di altre trasformazioni; nel primo caso si dirà che il gruppo primitivo G_r è *integrabile*, e nell' altro caso si dirà che G_r è *non integrabile*. (LIE).

È evidente che:

Ogni sottogruppo di un gruppo integrabile è anche integrabile.

Inoltre si può facilmente dimostrare che:

Ogni gruppo ad $r-m$ parametri G_{r-m} che sia isomorfo meriedricamente con un gruppo integrabile ad r parametri G_r, è anche integrabile.

Per maggiori particolari rimandiamo alla *Th. d. Transf.* di LIE-ENGEL, III, p. 679 e segg.

Pag. 258.

Equazione caratteristica di KILLING. *Rango di un gruppo. Invarianti del gruppo aggiunto.* —

Si abbia un gruppo G_r ad r parametri e sieno $X_1 \ldots X_r$ le sue trasformazioni infinitesime; consideriamo un sottogruppo ad un sol parametro e sia $\sum_{k=1}^{r} e_k X_k$ la sua trasformazione infinitesima, le costanti e essendo delle quantità fisse. Il problema

che ci proponiamo è il seguente: *Esiste un sottogruppo a due parametri di G_r, e di cui una delle trasformazioni infinitesime sia la* $\sum_{k=1}^{r} e_k X_k$?

Il problema equivale a quest'altro: Si possono sempre determinare le costanti $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ in modo che le due trasformazioni $\sum_k e_k X_k$, $\sum_s \lambda_s X_s$, formino un gruppo?

Perchè ciò sia, è necessario e basta che la parentesi $(\sum_k e_k X_k, \sum_s \lambda_s X_s)$ sia identicamente eguale ad una combinazione lineare a coefficienti costanti delle sole due medesime trasformazioni, cioè:

$$= \rho \sum_k e_k X_k + \omega \sum_s \lambda_s X_s .$$

Se ω fosse zero, allora il gruppo $\sum e_k X_k$ sarebbe il *gruppo derivato* (v. *nota precedente*) del supposto gruppo a due parametri, caso che noi vogliamo escludere; dobbiamo dunque supporre sempre ω diverso da zero.

Sostituendo allora alle incognite $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ delle altre quantità, possiamo sempre fare che il secondo membro si riduca ad un'espressione contenente solo il secondo termine. Se noi infatti poniamo:

$$\lambda_s = \mu_s - \frac{\rho}{\omega} e_s ,$$

la formola precedente diventa:

$$(\sum_k e_k X_k, \sum_s \mu_s X_s - \frac{\rho}{\omega} \sum_s e_s X_s) = \omega \sum_s \mu_s X_s ,$$

cioè:

$$(\sum_k e_k X_k, \sum_s \mu_s X_s) = \omega \sum_s \mu_s X_s, \qquad (1)$$

in cui le incognite sono le $\mu_1 \ldots \mu_r$ e la ω.

Per risolvere il problema proposto bisogna dunque soddisfare alla (1). Poichè le X formano già un gruppo, il primo membro si sviluppa in:

$$\sum_\nu \sum_k \sum_s e_k \mu_s c_{ks\nu} X_\nu,$$

quindi per la sussistenza delle (1) deve aversi:

$$\sum_{s=1}^{r} \mu_s \sum_{k=1}^{r} c_{ks\nu} e_k = \omega \mu_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots r). \quad (2)$$

Queste sono r equazioni lineari omogenee nelle μ, per la cui sussistenza è necessario che il determinante dei coefficienti sia zero; questo determinante è una funzione razionale intera di grado r in ω, e vi saranno quindi in generale sempre dei valori ω per cui le (2) sono compatibili.

Possiamo perciò dire: *Ogni trasformazione infinitesima di un gruppo G_r appartiene in generale sempre ad un sottogruppo a due parametri di G_r stesso.* (Lie).

Il determinante dei coefficienti delle (2) è:

$$\Delta = \left| \varepsilon_{s\nu} \omega - \sum_{k=1}^{r} c_{ks\nu} e_k \right|, \qquad (s, \nu = 1, 2, \ldots r),$$

indicando con $\varepsilon_{s\nu}$ il numero 1 o 0 secondochè s è eguale o diverso da ν. Quel determinante eguagliato a zero, dà luogo alla cosiddetta *equazione caratteristica di* Killing.

Si fa vedere che una delle radici di $\Delta = 0$ è sempre $\omega = 0$, e quindi Δ si sviluppa in:

$$\Delta = \omega^r - \psi_1(e)\,\omega^{r-1} + \psi_2(e)\,\omega^{r-2} - \ldots + \\ + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(\omega),$$

in cui le ψ sono funzioni razionali intere omogenee nelle e, delle quali si dimostra la importante proprietà che *esse sono invarianti* (v. Cap. II, § 1), *del gruppo aggiunto.*

Su queste funzioni ψ il KILLING stabilisce una notevole classificazione dei gruppi. Si dirà che G_r *ha il rango* l, *se delle* $r-1$ *funzioni* ψ *ve ne sono esattamente* l *di indipendenti.* Se tutte le ψ sono zero per qualunque sistema di valori delle e, allora $l = 0$, e si hanno gruppi di *rango zero.*

Per tali gruppi è evidente che *tutti quelli altri a due parametri da essi contenuti hanno le loro trasformazioni a due a due permutabili.*

Si può poi anche dimostrare: *Ogni gruppo di rango zero è integrabile* (v. *nota precedente*).

700
MANUALI HOEPLI

Pubblicati a tutto Luglio 1902.

Ministero dell' Istruzione
Gabinetto
del Sottosegretario di Stato

Roma, 3 nov. 1900.

Ill.mo Signore
Comm. Ulrico Hoepli
Editore
MILANO.

La collezione dei Manuali Hoepli, ricca ormai di quasi 700 volumi, forma la più vasta enciclopedia di scienze, lettere ed arti finora apparsa in Italia. Meritano lode certamente e gli autori, che in forma lucida e breve hanno preparato così valido ausilio alla gioventù studiosa, e l'editore che ha saputo scegliere, tra le varie discipline, quelle che meglio valgono a formare un complesso di cognizioni indispensabili alla cultura moderna.

firmato:

ENRICO PANZACCHI.

Sotto Segretario di Stato
Ministero della Pubbl. Istruzione.

Il Ministro
per l'Agricoltura, l' Industria
e il Commercio

Roma, 25 ott. 1900.

Ill. sig. Comm. U. Hoepli,
Milano.

La larga accoglienza fatta alla collezione dei manuali, editi dalla Sua benemerita Casa, deve certo formare la migliore e più ambita ricompensa per la S. V. Ill.ma, che con intelligente cura ne dirige la pubblicazione.

Questo Ministero ha avuto più volte occasione di fermare la sua attenzione sui lavori che più direttamente riguardano l' agricoltura, la zootecnia e le industrie ad esse attinenti, trovandoli rispondenti allo scopo, che la S. V. Ill.ma si propone di conseguire.

Mi torna quindi gradito di esprimerne a Lei il mio sincero compiacimento, mentre Le auguro che sempre maggior favore abbia ad incontrare codesta Sua utile raccolta

firmato: CARCANO.

Min. dell'Agr., Ind. e Comm.

AVVERTENZA

Tutti i MANUALI HOEPLI sono elegantemente legati in tela e si spediscono ***franco di porto*** nel Regno. — Chi desidera ricevere i volumi raccomandati, onde evitare lo smarrimento, è pregato di aggiungere la sopratassa di raccomandazione.

☞ **I libri, non raccomandati, viaggiano a rischio e pericolo del committente** ☜

700
Manuali Hoepli

Nella divisione sistematica che segue, fatta espressamente per facilitare la consultazione del presente catalogo, ho radunato in pochi gruppi e disposto in ordine alfabetico tutte le voci più salienti delle materie trattate nei Manuali Hoepli e prego gli Studiosi di consultarlo sempre nelle loro ricerche.

Agraria.

Abitazioni d. animali
Agricoltore (il lib. dell')
Agricoltore (pront. d.)
Agronomia
Id. e agricoltura
Agrumi
Alimentaz. bestiame
Analisi vino
Animali da cortile
Id. parassiti
Apicoltura
Assicur. aziende rurali
Bachi da seta
Bestiame e agricolt.
Cane
Cantiniere
Caseificio
Catasto
Cavallo
Chimica agraria
Cognac
Colombi domestici
Computisteria agraria
Concimi
Coniglicoltura
Distillazione vinacce
Economia fabb. rurali
Enologia
Id. domestica
Estimo rurale
Id. dei terreni
Floricoltura
Fosfati, perfosfati
Frumento e mais
Frutta minori
Frutticoltura
Funghi mangerecci
Gelsicoltura
Humus
Igiene rurale
Id. veterinaria
Immunità a. malattie
Insetti nocivi
Id. utili
Latte, burro o cacio
Legislaz. rurale
Macchine agricole
Mais
Majale
Malattie crittogam.
Malattie dei vini
Mezzeria
Molini
Mosti e vini (densità d.)
Olivo e Olio
Olii vegetali, ecc.
Orticoltura
Panificazione
Piante e fiori
Piante industriali
Piante tessili
Pollicoltura
Pomologia
Prato
Prodotti agr. d. Tropico
Selvicoltura
Tabacco
Tartufi e funghi
Triangolaz. Top. e Cat.
Uve da Tavola
Vini bianchi
Vino
Viticoltura
Zoonosi
Zootecnia

Prodotti alimentari.

Adulteraz. alimenti
Agrumi
Alimentazione
Animali da cortile
Apicoltura
Caseificio
Cantiniere
Cognac
Colombi domestici
Coniglicoltura
Conservazione sostanze alimentari
Enologia
Enologia domestica
Frumento
Frutta minori
Frutticoltura
Funghi mangerecci
Gastronomia
Latte, cacio e burro
Liquorista
Mais
Majale
Mosti e vini
Olivo e olio
Olii vegetali
Orticoltura
Ostricoltura
Panificazione
Piscicoltura
Pollicoltura
Tartufi e funghi
Uve da tavola
Vini bianchi
Vino

Industrie diverse.

Abiti per signora
Acetilene
Acido solforico
Apicoltura
Arti grafiche
Asfalto
Bachi da seta
Biancheria
Carta (Industria d.)
Colori e vernici
Commercio (Storia d.)
Concia pelli
Elettricità e appl. vedi al gruppo *Elettricità*
Fabbro ferraio
Falegname ebanista
Filatura e tessitura
Id. della seta
Fiori artificiali
Fonditore di metalli
Fotografia:
Carte fotografiche
Dizionario fotogr.
Fotocromatografia
Fotog. industriale
Fotografia:
Fotog. ortocromat.
Fotog. p. dilettanti
Fotogrammetria
Fotosmaltografia
Processi fotomecc.
Proiezioni fotog.
Ricettario fotog.
Spettrofotometria
Gaz illuminante
Gioielleria, oreficeria
Imitazioni e succedanei
Incandescenza a gaz
Litografia
Macchine per cucire
Marmista
Meccanica
Meccanico
Metalli preziosi
Modellatore meccan.
Naturalista preparat.
Operaio
Orologeria
Ostricoltura
Panificazione
Piante industriali
Id. tessiii
Piccole industrie
Pietre preziose
Pirotecnia
Piscicoltura
Pomologia artificiale
Ricettario domestico
Id. industriale
Saggiatore
Saponi (Industria dei)
Seta (Industria d.)
Specchi (Fabbric.)
Stearica (Industria)
Tessuti di lana e cot.
Tipografia
Tintore
Tintura della seta
Tornitore meccanico
Trine a fuselli
Vernici, lacche, inch.
Vetro
Zucchero

Fisica e Chimica.

Acetilene
Acido solforico
Adulterazione alim.
Alcool
Analisi chimica qual.
Analisi vino
Id. volumetrica
Calore
Chimica
Id. agraria
Id. analitica
Id. appl. a. igiene
Id. clinica
Id. legale
Id. sostanze col.
Chimico industriale
Climatologia
[illegible]gnac
Concimi
Conservaz. sost. alim.
Dinamica
Disinfezione
Distillazione vinacce
Elettrochimica
Energia fisica
Esplodenti
Farmacista
Farmacoterapia
Fisica
Fisica cristallografica
Fotografia (v. al gruppo *Industrie*)
Fulmini e parafulmini
Galvanoplastica
Galvanizzazione
Galvanostegia
Gravitazione
Igroscopi, igrom.
Latte, burro, cacio
Liquorista
Luce e colori
Id. e suono
Meteorologia
Microscopio
Olii veget. miner.
Ottica
Profumiere
Sieroterapia
Spettroscopio
Termodinamica
Tintore
Tintura di seta

Storia Naturale.

Acque miner. e term.
Anatom. e fisiol. comp.
Anatomia microscop.
Anatomia vegetale
Animali parass. uomo
Antropologia
Batteriologia
Biologia animale
Botanica
Cane
Cavallo
Coleotteri
Colombi domestici
Coniglicoltura
Cristallografia
Ditteri
Embriol e morfol. gen.
Fiori artificiali
Floricoltura
Fisica cristallografica
Fisiologia
Id. vegetale
Frutticoltura
Frutta minori
Funghi mangerecci
Geologia
Imenotteri ecc.
Insetti nocivi
Id. utili
Ittiologia
Lepidotteri
Majale
Malattie crittog.
Metalli preziosi
Mineralogia gener.
Id. descritt.
Naturalista preparat.
Naturalista viaggiat.
Orticoltura
Ostricoltura e mitil.
Paleoetnologia
Paleontologia
Piante e fiori
Pietre preziose
Piscicoltura
Pollicoltura
Pomologia
Protistologia
Selvicoltura
Sismologia
Tabacco
Tartufi e funghi
Tecnica protistol.
Uccelli canori
Vulcanismo
Zoologia

Medicina, Chirurgia, Igiene.

Acque miner. e term.
Analisi chimica qual.
Anatomia e fis. comp.
Anatomia microscop.
Anatomia topograf.
Animali parass. uomo
Antropometria
Assistenza infermi
Id. pazzi
Batteriologia
Biologia animale
Chimica appl. a. igiene
Chimica clinica
Chimica legale (toss.)
Chirurg. operativa
Climatologia
Disinfez. (Pratica d.)
Embriologia
Epilessia
Farmacista
Farmacoterapia
Fisiologia
Idroterapia
Igiene della bocca
Id. del lavoro
Id. vita pubblica
Id. della pelle
Id. privata
Id. rurale
Id. scolastica
Id. veterinaria
Id. della vista
Immunità malattie
Impiego ipodermico
Infortuni d. montagna
Legislazione sanitaria
Malattie del sangue
Massaggio
Materia medica
Medicatura antisett.
Medico pratico
Microbiologia
Microscopio
Morte vera e app.
Nutrizione bamb.
Organoterapia
Ortofrenia
Pellagra
Protistologia
Psichiatria
Psicologia fisiol.
Röntgen (Raggi)
Semejotica
Sieroterapia
Soccorsi d'urgenza
Terapia infanzia
Tisici e sanatori
Veleni
Zoonosi

Elettricità.

Cavi telegrafici
Elettricità
Elettrotecnica
Elettrochimica
Fulmini e parafulmini
Galvanizzazione
Galvanoplastica
Galvanostegia
Illuminazione elettric.
Magnetis. e elettricità
Metallocromia
Röntgen (Raggi di)
Telefono
Telegrafia
Unità assolute

Tecnologia, Ingegneria, Costruzioni, ecc.

Abitazioni anim. dom.
Architettura
Aritmetica e Geom. op.
Asfalto
Automobilista
Calcestruzzo
Calci e cementi
Calderaio
Casa dell'avvenire
Ciclista
Conti e calcoli fatti
Cubatura legnami
Curve circolari
Decoraz. e indust. art.
Dinamica
Disegnatore meccan.
Disegno assonometr.
Id. geometrico
Id. industriale
Id. di projez. ort.
Id. (Gramm. del)
Dizionario tecnico
Fabbricati civili
Fabbro ferraio
Falegname-ebanista
Fognatura cittadina
Id. domestica
Fonditore in metalli
Gaz illuminante
Gnomonica
Idraulica
Imitazioni e succed.
Incandescenza a gaz
Industrie (Piccole)
Infortuni sul lavoro (Mezzi p. prevenirli)
Ingegnere civile
Ingegneria legale
Lavori in terra
Leggi lavori pubblici
Leghe metalliche
Macchine a vapore
Id. agricole
Id. per cucire
Macchinista e fuochist.
Marmista
Meccanica
Meccanico
Meccanismi (500)
Miniere
Modellatore meccanic.
Molini
Momenti resistenti
Montatore d. macchine
Operaio
Orologeria
Peso metalli
Prospettiva
Regolo calcolatore
Resistenza d. materiali
Scaldamento e ventil,
Siderurgia
Stereometria
Strumenti metrici
Tavole d'alligazione
Tempera e cementaz.
Termodinamica
Tornitore

Matematiche.

Algebra elementare
Id. compl. I anal.
Id. Id. II equaz.
Id. (Esercizi di)
Aritmetica pratica
Id. razionale
Id. (Eserc. di)
Id. e geom. d. op.
Astronomia
Id. nautica
Calcolo infin. I calc. diff
Id. II integrale
Id. III d. variaz.
Id. (Esercizi di)
Celerimensura
Compensazione errori
Computisteria
Conti e calcoli fatti
Cubatura legnami
Curve circolari
Determinanti
Disegno assonometr.
Disegno geometrico
Id. industriale
Id. di projezioni
Id. topografico
Economia matematica
Eserciz. d. geom. elem.
Id. di Trigonom.
Formulario di matem.
Funzioni analitiche
Id. ellittiche
Geometr. anal. d. piano
Id. Id. d. spazio
Id. descrittiva
Id. metr. e trig.
Id. pratica
Id. proj. d. piano
Id. Id. d. spazio
Id. pura
Id. e trig. d. sfera
Gnomonica
Gruppi di trasformaz.
Gravitazione
Interesse e sconto
Logaritmi
Logica matematica
Logismografia
Matematiche superiori
Metrologia
Peso metalli
Problemi di geometr.
Prospettiva
Ragioneria
Id. d. cooper.
Id. industrial.
Ragioniere (pront. d.)
Regolo calcolatore
Repertor. di matemat.
Stereometria
Strumenti metrici
Telemetria
Teoria dei numeri
Id. d. ombre
Termodinamica
Triangolazioni topog

Amministrazione pubblica
Diritto e Giurisprudenza.

Assicurazione	Diritto costituzionale	Legge sulle tasse di re-
Id. e stima danni	Id. Ecclesiastico	gistro e bollo
Beneficenza	Id. Intern. pubbl.	Legislazione sanitaria
Bonifiche	Id. Id. privato	Legislazione rurale
Catasto	Id. penale	Logismografia
Chimica appl. a igiene	Id. Id. romano	Mandato commerciale
Codice daziario	Id. romano	Notaio
Codice del bollo	Economia politica	Ordinam. Stati d'Eur.
Id. doganale	Esattore comunale	Id. Id. f. d'Eur.
Id. civile	Estimo dei terreni	Paga giornaliera
Id. proced. civile	Id. rurale	Posta
Id. commercio	Fognatura cittadina	Produz. e commer. vino
Id. pen. e proc. pen.	Giustizia amministr.	Prontuario d. agricolt.
Id. di marina	Igiene scolastica	Id. d. ragion.
Id. pen. p. l'eserc.	Id. veterinaria	Proprietario di case
Id. del teatro	Imposte dirette	Ragioneria
Id. d. perito misur.	Infortuni sul lavoro	Ragioneria d. Cooper.
Cod. e leggi us. d'Italia	Ingegneria legale	Id. industriale
Computisteria	Interesse e sconto	Ricchezza mobile
Conciliatore	Ipoteche	Scienza d. finanze
Contabilità comunale	Legge comunale	Scritture d'affari
Id. dello Stato	Id. sui lav. pubbl.	Socialismo
Cooperative rurali	Id. s. ordin. giud.	Società di mut. soccor.
Cooperazione	Id. infort. s. lavoro	Id. industriali
Debito pubblico	Id. s propr. letter.	Sociologia generale
Digesto	Id. s. diritti d'aut.	Statistica
Diritti e dov. d. cittad.	Id. s. priv. industr.	Testamenti
Diritto amministrativ.	Id. s. sanità e sicu-	Trasporti e tariffe
Id. civile	rezza pubblica	Valori pubblici
Id. commerciale		

Archeologia, Belle Arti.

Amatore oggett. d'arte	Decoraz. e ind. artist.	Ornatista
Anatomia pittorica	Disegno	Paleografia
Antichità greche	Id. (Gramm. del)	Paleoetnologia
Id. priv. d. rom.	Fiori artificiali	Pittura italiana
Id. pubbl. rom.	Fotosmaltografia	Id. ad olio
Armi antiche	Gioielleria, oreficeria	Prospettiva
Araldica	Litografia	Ristauratore dipinti
Archeol. d. arte greca	Luce e colori	Scoltura
Id. d. arte etr. rom.	Majoliche e porcellane	Storia dell'arte
Architettura	Marmista	Teoria d. ombre
Armi antiche	Mitologia	Topografia di Roma
Arti grafiche fotomec.	Monete greche	Vocabolarietto numis.
Atene	Id. romane	Vocabolario araldico
Calligrafia	Monogrammi	
Colori e pittura	Numismatica	

Storia e Geografia.

Acque minerali
Alpi
Atlante st. geog. d. Ital.
Id. geog. univers.
Cartografia
Climatologia
Cosmografia
Cristoforo Colombo
Cronologia.
Id. scop. geog.
Dizionario alpino
Id. geografico
Id. dei comuni d'Italia
Dizionario biografico
Esercizi geografici
Etnografia
Geografia
Id. classica
Id. fisica
Id. commercial.
Geologia
Manzoni A.
Mare
Mitologia
Omero
Paleoetnologia
Prealpi bergamasche
Prontuario di geograf.
Rivoluzione francese
Shakespeare
Sismologia
Statistica
Storia antica
Id. d. arte militare
Id. del commercio
Id. d'Italia
Id. di Francia
Id. d'Inghilterra
Id. e cronologia
Topografia di Roma
Vulcanismo

Erudizione, Bibliografia, ecc.

Amatore oggetti d'art.
Id. di maioliche
Armi antiche
Atene
Autografi
Bibliografia
Bibliotecario
Classificaz. d. scienze
Crittografia
Dizionario bibliograf.
Id. biografico
Id. stenograf.
Id. abbreviat.
Enciclopedia Hoepli
Epigrafia latina
Errori e pregiudizi
Evoluzione (storia d.)
Grafologia
Litografia
Paleoetnologia
Paleografia
Stenografia
Stenografo
Tipografia

Filosofia, Pedagogia, Religione.

Bibbia
Buddismo
Didattica
Diritto ecclesiastico
Estetica
Etica
Evoluzione
Filosofia morale
Giardino infantile
Grafologia
Igiene scolastica
Imitazione Cristo
Logica
Mitologia
Psicologia
Id. fisiologica
Protezione animali
Ortofrenia
Religioni dell'India
Sordomuto

Arte militare, Nautica.

Amatore oggetti d'art.
Armi antiche
Attrezzatura navale
Canottaggio
Codice cavalleresco
Costruttore navale
Disegno e costruz. navi
Doveri macchin. naval.
Duellante
Esplodenti
Filonauta
Flotte moderne
Ingegnere navale
Macchinista navale
Marine da guerra
Marino
Meccanica del macchinista di bordo
Nautica stimata
Pirotecnia
Scherma
Storia arte militare
Telemetria
Ufficiale

Letteratura, Linguistica, Filologia.

Arabo parlato
Arte del dire
Conversaz. Ital.-Ted.
Id. Ital.-Fran.
Corrisp. comm. italian.
Id. Id. spagn.
Id. Id. franc.
Grittografia
Dantologia
Dialetti italici
Id. grechi
Dizion. abbrev. latine
Id. bibliografico
Id. Eritreo
Id. Milanese
Id. Tedesco
Id. univ. in 4 ling.
Dottrina pop. in 4 ling.
Enciclopedia Hoepli
Esercizi greci
Id. latini
Id. di traduzione della gramm. franc.
Esercizi di traduzione della gramm. tedesc.
Filologia classica
Florilegio poet. greco
Fonologia italiana
Id. latina
Fraseologia francese
Glottologia
Grammatica albanese
Grammat. dan.-norv.
Id. ebraica
Id. Francese
Id. Galla (Orom.)
Id. Greca
Id. Greca-mod.
Id. Inglese
Id. Italiana
Id. Latina
Id. Olandese
Id. Portoghese-Brasiliana
Grammat. Rumena
Id. Russa
Id. Slovena
Id. Spagnuola
Id. Svedese
Id. Tedesca
Id. Turca osm.
Letteratura albanese
Id. american.
Id. araba
Id. assira
Id. catalana
Id. dramm.
Id. ebraica
Id. egiziana
Id. francese
Id. greca
Id. indiana
Id. inglese
Id. italiana
Letteratura norveg.
Id. persiana
Id. provenz.
Id. romana
Id. spagnuol.
Id. tedesca
Id. ungheres.
Id. slava
Lingua gotica
Lingue d'Africa
Id. neo-latine
Id. straniere
Metrica d. greci e rom.
Morfologia greca
Id. italiana
Omero
Paleografia
Relig. e ling. di India
Rettorica
Ritmica italiana
Sanscrito
Shakespeare
Stilistica
Tavole divina comm.
Tigrè
Traduttore tedesco
Verbi greci
Id. latini
Vocabol. lingua Russa
Volapuk

Musica, Sport.

Acrobatica e atletica
Alpinismo
Amatore oggetti d'art.
Armonia
Armi antiche
Automobilista
Ballo
Biliardo
Cacciatore
Cane (Allevatore del)
Canottaggio
Canto (Il)
Cantante
Cavallo
Chitarra
Ciclista
Codice cavalleresco
Dizionario alpino
Id. filatetico
Dizionario delle corse
Duellante
Filonauta
Ginnastica femminile
Id. maschile
Id. (Storia d.)
Giuochi ginnastici
Infortuni d. montagna
Lawn-Tennis
Mandolinista
Nuotatore
Pianista
Proverbi sul cavallo
Scacchi
Scherma
Storia della musica
Strumentazione
Strumenti ad arco

Elenco completo dei MANUALI HOEPLI disposti in ordine alfabetico per materia.

L. c.

Abitazione degli animali domestici, del Dott. U. BARPI, di pag. XVI-372, con 168 incisioni . . . . 4 —

Abitazioni — *vedi* Fabbricati civili.

Abiti per signora (Confezione di) e l'arte del taglio, compilato da EMILIA COVA, di pag. VIII-91, con 40 tavole . 3 —

Abbreviature — *vedi* Dizionario abbreviature — Dizionario stenografico.

Acetilene (L') del Dott. L. CASTELLANI di pag. XVI-126 . 2 —

Acido solforico, Acido nitrico, Solfato sodico, Acido muriatico (Fabbricazione dell'), del Dott. V. VENDER, di pag. VIII-312, con 107 incisioni e molte tabelle. . . . 3 50

Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia,** di LUIGI TIOLI. Topografia - Analisi - Elenchi - Denominazione delle acque - Malattie per le quali si prescrivono - Comuni in cui scaturiscono - Stabilimenti e loro proprietari - Acque e fanghi in commercio - Negozianti d'acque minerali, di pag. XXII-552 . . . . 5 50

— *vedi anche* Legislazione delle.

Acrobatica e atletica di A. ZUCCA, di pag. XXX-267, con 100 tavole e 42 incisioni nel testo 6 50

Acustica — *vedi* Luce e suono.

Adulterazioni e falsificazioni (Dizionario delle) **degli alimenti,** del Dott. Prof. L. GABBA (è in lavoro la 2ª ediz.).

Agricoltore (**Prontuario dell'**). Manuale di agricoltura, economia, estimo e costruzioni rurali, del prof. V. NICCOLI, 2ª edizione riveduta ed ampliata, di p. XXVIII-464 . . . 5 50

— (**Il libro dell'**) Agronomia, agricoltura, industrie agricole del Dott. A. BRUTTINI, di pag. XX-446 con 303 figure . 3 50

Agronomia, del Prof. CAREGA DI MURICCE, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dall'autore, di pag. XII-210. . . . . 1 50

Agronomia e agricoltura moderna, di G. SOLDANI, 2ª ed. di pag. VIII-416 con 134 incisioni e 2 tav. cromolit. . . 3 50

Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. ALOI, con 22 incisioni e 5 tavole cromolit., pag. XII-238 3 50

Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. CANTAMESSA di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . 3 —

Alcool industriale, di G. CHIAPETTI. Produzione dell'alcool industriale dal punto di vista dell'agricoltura, applicazione dell'alcool denaturato alla fabbricazione dell'aceto e delle vinacce, alla produzione della forza motrice, al riscaldamento e alla illuminazioue con 98 illustrazioni. (In lavoro).

Algebra complementare, del Prof. S. PINCHERLE:
Parte I. *Analisi Algebrica*, di pag. VIII-174 . . . . 1 50
Parte II. *Teoria delle equazioni*, pag. IV-169 con 4 inc. 1 50

L. c.

Anatomia pittorica, del Prof. A LOMBARDINI, 2ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. VIII-168, con 53 inc. . . . 2 —

Anatomia topografica, del Dott. Prof. C. FALCONE, di pag. XV-395, con 30 incisioni . . . . 3 —

Anatomia vegetale, del Dottor A. TOGNINI, di pagine XVI-274 con 41 incisioni . . . . 3 —

Animali da cortile, del Prof. P. BONIZZI, di pag. XIV-238 con 39 incisioni. (La 2ª ediz. è in preparazione).

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. MERCANTI, di pag. IV-179, con 33 incisioni 1 50

Antichità greche, del Prof. V. INAMA. (In lavoro).

Antichità private dei romani, del Prof. N. MORESCHI. 3ª edizione interamente rifatta del Manuale di W. KOPP, di pag. XVI-181 con 7 incisioni 1 50

Antichità pubbliche romane di J. G. HUBERT, rifacimento delle antichità romane pubbliche, sacre e militari di W. KOPP, traduzione del Dott. A. WITTGENS, di pag. XIV-324, con 18 figure intercalate nel testo e una pianta. . 3 —

Antisettici — *vedi* Medicatura antisettica.

Antropologia, del Prof. G. CANESTRINI, 3ª ediz., di pag. VI-239 con 21 incisioni. 1 50

Antropometria, di R. LIVI, di pag. VIII-237 con 32 incis. 2 50

Apicoltura, del Prof. G. CANESTRINI, 3ª ediz. riveduta di pag. IV-215 con 43 incisioni . . . . 2 —

Appalti — *vedi* Ingegneria legale.

Arabo parlato (L') in Egitto, grammatica, frasi, dialoghi e raccolta di oltre 6000 vocaboli del Prof. A. NALLINO. (Nuova ediz. dall'*Arabo volgare* di DE STERLICH e DIB KHADDAG) di pag. XXVIII-386 . . . . 4 —

Araldica (Grammatica), di F. TRIBOLATI, 4ª ediz. rifatta da G. DI CROLLALANZA. (In lavoro).

Aranci — *vedi* Agrumi.

Archeologia. Arte Greca, del Prof. I. GENTILE (esaurito). È in preparazione una nuova ediz. rifatta del Prof. S. RICCI

Archeologia e Storia dell'arte italica, etrusca e romana. 3ª ediz. intier. rifatta. Un vol. di testo con intr. bibliogr. ed appendici sulle ultime scoperte e questioni archeol. di pag. XXXIV-346 con 96 tav. nel testo a cura del Prof. S. RICCI e un vol. di 79 tav. e in. a cura del Prof. I. GENTILE 7 50

Architettura (Manuale di) **italiana,** antica e moderna, di A. MELANI, 3ª edizione rifatta con 131 incisioni e 70 tavole di pag. XXVIII-460. . . . . 6 —

L. c.

Argentatura — *vedi* Galvanizzazione — Galvanoplastica — Galvanostegia — Metallocromia — Metalli preziosi — Piccole industr.

Aritmetica pratica, del Prof. Dott. F. PANIZZA. 2ª edizione riveduta, di pag. VIII-188 . . . . 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. PANIZZA, 3ª edizione riveduta di pag. XII-210 . . . . 1 50

— **(Esercizi di)**, del Prof. Dott. F. PANIZZA, di p. VIII-150 1 50

Aritmetica (L') **e Geometria dell'operaio,** di EZIO GIORLI, di pag. XII-183, con 74 figure . . . . 2 —

Armi antiche (Guida del raccoglitore e dell'amatore di) di J. GELLI, di pag. VIII-388, con 9 tavole fuori testo, 432 incisioni nel testo e 14 tavole di marche 6 50

Armonia (Manuale di), del Prof. G. BERNARDI, con prefazione di E. ROSSI di pag. XII-288 . . . . 3 50

Arte del dire (L'), di D. FERRARI, Manuale di rettorica per lo studente delle Scuole secondarie. 5ª ediz. corr., (10, 11 e 12 migliaio), pag. XVI-350 e quadri sinottici . . . 1 50

Arte della memoria (L'), sua storia e teoria (parte scientifica). Mnemotecnia Triforme (parte pratica) del Generale B. PLEBANI, di pag. XXXII-224 con 13 illustr. 2 50

Arte mineraria. — *vedi* Miniere (Coltivazione delle).

Arte salutare — *vedi* Memoriale dei Medici pratici.

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche,** ossia la Eliografia nelle diverse applicaz. (Fotozincotipia, fotozincografia, fotocromolitografia, otolitografia, fotocollografia, fotosilografia, tricromia, fotocollocromia, elioincisione, ecc. secondo i metodi più recenti, con un Dizionarietto tecnico e un cenno storico sulle arti grafiche; 3ª ediz. corr. e accresciuta ed in parte rifatta, con molte illustr. di pag. XVI-238 . . . 2 —

Asfalto (L'), fabbricazione, applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI, con 22 incisioni, di pag. VIII-152. . . . . . 2 —

Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di pag. XII-308. 3 —

Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di pag. VI-161.. 1 50

Assicurazioni (Le) **e la stima dei danni** nelle aziende rurali, con appendice sui mezzi contro la grandine, del Dr. A. CAPILUPI, di pag. VIII-284, 17 incisioni 2 50

Assistenza degl'infermi nell'ospedale ed in famiglia, del Dott. C. Calliano, 2ª ediz., pag. XXIV-448, 7 tav. . . . 4 50

Assistenza dei pazzi nel manicomio e nella famiglia, del Dr. A. PIERACCINI, e prefaz. del prof. E. MORSELLI, pag. 250 2 50

L. c.

Astronomia, di J. N. LOCKYER, nuova versione libera con note ed aggiunte del Prof. G. CELORIA, 4ª ediz., di pag. XI-258 con 51 incisioni. 1 50

Astronomia nautica, del prof. G. NACCARI, di pag. XVI-320, con 45 incis. e tav. numeriche . . . . 3 —

Atene. Brevi cenni sulla città antica e moderna, seguiti da un saggio di Bibliografia descrittiva e da una Appendice Numismatica, di S. AMBROSOLI, con un panorama e una pianta d'Atene, 22 tav. e varie incisioni nel testo . . . 3 50

Atlante geografico-storico d'Italia, del Dott. G. GAROLLO, 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appendice . . . 2 —

Atlante geografico universale, di R. KIEPERT, 26 carte con testo. *Gli Stati della terra* del Dott. G. GAROLLO. 10ª ediz. aumentata e corretta (dalla 91.000ª alla 100.000ª copia) pag. VIII-88 . . . . 2 —

Atletica — *vedi* Acrobatica.

Atmosfera — *vedi* Igroscopi e igrometri.

Attrezzatura, manovra navale, segnalazioni marittime e Dizionarietto di Marina, di F. IMPERATO, 3ª edizione ampliata, di pag. XXIV-643, con 330 incis. e 28 tav. in cromolit. riproducenti le bandiere maritt. di tutte le naz. 6 50

Autografi (L'amatore d'), del conte E. BUDAN con 361 facsimili di pag. XIV-426 . . . . 4 50

Autografi (Raccolte e raccoglit. di) in Italia di C. VANBIANCHI, di pag. XVI-376, 102 tav. di facsimili d'aut. e rit. . 6 50

Automobilista (Nanuale dell') **e guida del meccanico conduttore d'automobili.** Trattato sulla costruzione dei veicoli semoventi, dedicato agli automobilisti italiani, agli amatori d'automobilismo in genere, agli inventori, ai dilettanti di meccanica ciclistica, ecc., di G. PEDRETTI, di pag. XXIV-480, con 181 incisioni 5 50

Avicoltura — *vedi* Animali da cortile — Colombi — Pollicoltura.

Avvelenamenti — *vedi* Veleni.

Bachi da seta, del Prof. F. NENCI. 3ª ediz. con note ed aggiunte, di pag. XII-300, con 47 incis. e 2 tav. . . . 2 50

Balistica — *vedi* Armi antiche — Esplodenti — Pirotecnia — Storia dell'arte militare.

Ballo (Manuale del) di F. GAVINA, di pag. VIII-249, con 92 figure. Contiene: Storia della danza - Balli girati - Cotillon - Danze locali - Feste di ballo - Igiene del ballo. 2 50

Bambini — *vedi* Nutrizione dei — Ortofrenia — Terapia.

Barbabietola da zucchero — *vedi* Zucchero.

L. c.

Batteriologia, dei Professori G. e N. CANESTRINI, 2ª ediz. in gran parte rifatta, di pag. X-274 con 37 incis. . . . 1 50

Beneficenza (Manuale della), del Dott. L. CASTIGLIONI, con appendice sulle contabilità delle istituzioni di pubblica beneficenza, del Rag. G. ROTA, di pag. XVI-340. . . . 3 50

Bestiame (Il) **e l'agricoltura in Italia,** del Prof. E. ALBERTI, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie 2 50

Biancheria (Disegno, taglio e confezione di), Manuale teorico pratico di E. BONETTI, con un Dizionario di nomenclatura, 2ª edizione riveduta e aumentata, di pag. XVI-202 con 50 tavole illustrative e 5 prospetti . . . . . 3 —

Bibbia (Man. della), di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-308 . 2 50

Bibliografia, di G. OTTINO, 2ª edizione riveduta, di pag. IV-166, con 17 incisioni . . . . 2 —

Bibliotecario (Manuale del), di G. PETZHOLDT, tradotto sulla 3ª edizione tedesca, con un'appendice originale di note illustrative, di norme legislative ed amministrative e con un elenco delle pubbliche biblioteche italiane e straniere, per cura di G. BIAGI e G. FUMAGALLI di pagine XX-364-CCXIII 7 50

Biliardo (Il giuoco del), di J. GELLI, di pag. XV-179, con 79 illustrazioni 2 50

Biografia — *vedi* Cristoforo Colombo — Dantologia — Dizionario biografico — Manzoni — Napoleone I — Omero — Shakespeare.

Biologia animale (Zoologia generale e speciale) per Naturalisti, Medici e Veterinarii del Dott. G. COLLAMARINI, di pag. X-426 con 23 tavole . . . . 3 —

Bollo — *vedi* Codice del bollo — Leggi registro e bollo.

Bonifiche (Manuale amministrativo delle) di C. MEZZANOTTI. (In lavoro).

Borsa (Operaz. di) — *vedi* Debito pubblico — Valori pubblici.

Boschi — *vedi* Selvicoltura.

Botanica, del Prof. I. D. HOOKER, traduzione del Prof. N. PEDICINO, 4ª ediz., di pag. VIII-134, con 68 incisioni . 1 50

Botti — *vedi* Enologia.

Bronzatura — *vedi* Metallocromia — Galvanostegia.

Bronzo — *vedi* Leghe metalliche.

Buddismo, di E. PAVOLINI, di pag. XVI-164 . . . . . 1 50

Burro — *vedi* Latte — Caseificio.

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 2ª edizione rifatta, di pag. XIII-315, con 41 incisioni 2 50

Cacio — *vedi* Bestiame — Caseificio — Latte, ecc.

Caffè — *vedi* Prodotti agricoli.

L. c.

Calcestruzzo (Costruzioni in) **ed in cementi armati,** di G. VACCHELLI, di pag. XVI-312, con 210 incis. (È in lavoro la 2ª edizione).

Calci e Cementi (Impiego delle), per l'Ing. L. MAZZOCCHI di pag. XII-212 con 49 incisioni . . . . 2 —

Calcolazioni mercantili e bancarie — *vedi* Conti e Calcoli fatti — Interesse e sconto — Prontuario del ragioniere — Monete, pesi e misure inglesi.

Calcolo infinitesimale, del Prof. E. PASCAL:

Parte I. *Calcolo differenziale,* di pag. IX-316 con 10 incisioni. (È in preparazione la 2ª edizione).

„ II. *Calcolo integrale,* di pag. VI-318 con 15 inc. 3 —

„ III. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite,* di pag. XII-300 . . . . 3 —

— **Esercizi di calcolo infinitesimale** (Calcolo differenziale e integrale), del Prof. E. PASCAL, di pag. XX-372 . . . 3 —

Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, e di altri apparecchi industriali, di G. BELLUOMINI, di pag. XII-248, con 220 incisioni. . . . . 3 —

Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 55 tavole di modelli dei principali caratteri conformi ai programmi, del Prof. R. PERCOSSI, con 38 facsimili di scritture . . . . 3 —

Calore (Il), del Dott. E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296, con 98 incisioni . . . . 3 —

Cancelliere — *vedi* Conciliatore.

Candele — *vedi* Industria stearica.

Cane (Manuale dell'amatore ed allevatore del), di ANGELO VECCHIO, di pag. XVI-403, con 129 inc. e 51 tav. . . 6 50

Canottaggio (Manuale di), del Cap. G. GROPPI, di pagine XXIV-456, con 387 incis. e 91 tav. cromolit. 7 50

Cantante (Man. del). di L. MASTRIGLI, di pag. XII-132 . 2 —

Cantiniere (Il). Manuale di vinificazione per uso dei cantinieri, di A. STRUCCHI, 3ª edizione riveduta ed aumentata, con 52 incisioni unite al testo, una tabella completa per la riduzione del peso degli spiriti, ed un'Appendice sulla produzione e commercio del vino in Italia, di pag. XVI-256 2 —

Canto (Il) **nel suo meccanismo,** di P. GUETTA, di p. VIII-253, con 24 incisioni 2 50

Carborundum — *vedi* Imitazioni.

Carburo di calcio — *vedi* Acetilene.

L. c.

Carta (Industria della), dell'Ing. L. SARTORI, di pag. VII-326, con 106 incisioni e 1 tavola 5 50

Carte fotografiche, Preparazione e trattamento, di L. SASSI, di pag. XII-353 . . . . 3 50

Carte geografiche — *vedi* Atlante.

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto della storia della Cartografia, del Prof. E. GELCICH, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . 2 —

Casa (La) **dell'avvenire,** dell'Ing. PEDRINI. (In lavoro).

Case coloniche — *vedi* Economia fabbricati rurali.

Caseificio, di L. MANETTI, 3ª ediz. nuovamente ampliata dal Prof. G. SARTORI, di pag. VIII-256, con 40 incis. . 2 —

Catasto (Il nuovo) **italiano,** di E. BRUNI, di pag. VII-346 . 3 —

Cavallo (Il), del Colonnello C. VOLPINI, 2ª edizione rived. ed ampliata di pag. VI-165, con 8 tavole 2 50

Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione, dell'Ing. E. JONA, di pag. XVI-388, 188 fig. e 1 carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine . . 5 50

Cedri — *vedi* Agrumi.

Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. BORLETTI, di pag. VI-148, con 29 incisioni . . 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. ORLANDI, di pag. 1200, con quadro generale d'interpolazioni . . . 18 —

Celluloide — *vedi* Imitazioni.

Cementazione — *vedi* Tempera.

Cementi armati — *vedi* Calcestruzzo — Calci e cementi.

Ceralacca — *vedi* Vernici e lacche.

Ceramiche — *vedi* Maioliche e porcellane — Fotosmaltografia.

Chimica, del Prof. H. E. ROSCOE, 5ª edizione rifatta da E. RICCI, di pag. XII-228, con 47 incisioni. 1 50

Chimica agraria, di A. ADUCCO, p. VIII-328, 2ª ed. (in lav.).

Chimica analitica (Elementi scientifici di), di W. OSTWALD, trad. del Dott. BOLIS, di pag. XVI-234 . . . . 2 50

Chimica applicata all'igiene. Guida pratica ad uso degli Ufficiali sanit.. Medici - Farmacisti - Commercianti - Laboratori d'igiene, di merciologia, ecc., di P. E. ALESSANDRI, di pag. XX-515, con 49 incisioni e 2 tav. 5 50

Chimica clinica, del Prof. R. SUPINO, di pagine XII-202. . 2 —

Chimica delle sostanze coloranti, di A. PELLIZZA. (In lavoro).

Chimica legale, (Tossicologia), di N. VALENTINI, di pagine XII-243 . . . . 2 50

Chimico (Manuale del) **e dell'industriale.** Raccolta di ta-

L. c.

belle, di dati fisici e chimici e di processi d'analisi tecnica, ad uso dei chimici analitici e tecnici, dei direttori di fabbriche, dei fabbricanti di prodotti chimici, degli studenti di chimica, ecc., ecc., del Dottor L. GABBA, 3ª edizione ampliata, riveduta ed arricchita delle tavole analitiche di H. WILL, di pag. XIX-457, con 12 tavole 5 50

Chirurgia operativa (Man. di), dei Dottori R. STECCHI e A. GARDINI, di pag. VIII-322, con 118 incisioni . . . . . 3 —

Chitarra (Manuale pratico per lo studio della), di A. PISANI, di pag. XVI-116, con 36 figure e 25 esempi di musica. . . 2 —

Ciclista, di I. GHERSI, 2ª ediz. complet. rifatta del " Manuale del Ciclista „ di A. GALANTE, di pag. 244, 147 inc. . . . 2 50

Cimiteri — *vedi* Ingegneria legale.

Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO, p. XVI-292 . 3 —

Climatologia, di L. DE MARCHI, pag. X-204 e 6 carte . . . 1 50

Cloruro di sodio — *vedi* Sale.

Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), di J. GELLI, 9ª ediz. rifatta, di pag. XVI-283 . . . . 2 50

Codice del bollo (Il). Nuovo testo unico commentato colle risoluzioni amministrative e le massime di giurisprudenza, ecc., di E. CORSI, di pag. C-564. . . . . 4 50

Codice civile del Regno d'Italia, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. 232 . . . 1 50

Codice di commercio, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. IV-158. . . . . 1 50

Codice daziario, di G. DE SANIO. (In lavoro).

Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. BRUNI, di pag. XX-1078 con 4 inc. 6 50

Codice di marina mercantile, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. IV-290. . . . . 1 50

Codice metrico internazionale — *vedi* Metrologia.

Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. IV-230. . . . . 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. 179 . . 1 50

Codice del perito misuratore. Raccolta di norme e dati pratici per la misurazione e la valutazione d'ogni lavoro

L. c.

edile, prontuario per preventivi, liquidazioni, collaudi, perizie, arbitramenti, degli Ingegn. L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, di pag. XIII-498 con 116 illustrazioni 5 50

Codice di procedura civile, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2ª ediz. di pag. 167 . . . . 1 50

Codice del teatro (Il). Vade-mecum legale per artisti lirici e drammatici, impresari, capicomici, direttori d'orchestra, direzioni teatrali, agenti teatrali, gli avvocati e per il pubblico, dell'Avv. TABANELLI, di pag. XVI-328 . . . . . 3 —

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale coordinati e annotati dal Prof. Avv. L. FRANCHI, raccolti in quattro grossi volumi legati in pelle flessibile . . . . . 36 —

Vol. I. Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo (*otto codici*) 2ª edizione, di pag. VIII-1261 . . . . 8 50

Vol. II. Parte I. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ad estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolamenti e disposte secondo l'ordine alfabetico delle mater Dalla voce " Abbordi in mare „ alla voce " Istruz. pubblica (Legge Casati), „ di pag. VIII-1364 a 2 colonne . . . . . 9 -

Vol. II. Parte II. Dalla voce: *Laghi pubblici* alla voce: *Volture catastali* con appen., pag. VIII-1369-2982 a 2 col. 12 —

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere e di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati a cura della Società italiana degli autori, 2ª edizione interamente rifatta dal prof. L. FRANCHI, di pagine VII-617, legato in tutta pelle flessibile 6 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di DAL PIAZ, corredato di annotazioni del Cav. G. PRATO, di pag. X-168, con 37 incisioni . . . . 2 —

Coleotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI, (Entomologia I) di pag. XVI-334, con 215 inc. . . , ... 3 —

Collezioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Amatore di maioliche — Armi antiche — Autografi — Dizionario filatelico.

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. BONIZZI, 2ª edizione rifatta a cura della Società Colombifila fiorentina. di pag. X-211, con 26 figure . . . . 2 —

L. c.

Colorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.

Colori (La scienza dei) **e la pittura**, di L. GUAITA, p. 248 . 2 —

Colori e vernici, di G. GORINI, 3ª ediz. totalmente rifatta, per cura di G. APPIANI, di pag. X-282, con 13 incisioni 2 —

Combustibili — *vedi* Imitazioni.

Commedia — *vedi* Letteratura drammatica.

Commerciante (Manuale del) di C. DOMPÉ (In lavoro).

Commercio, (Storia del) di R. LARICE, di pag. 368 . . . 3 —

Commercio — *vedi* Codice — Corrispondenza commerciale — Computisteria — Geografia commerciale — Industria zucchero — Mandato — Merciologia — Produzione e commercio del vino — Ragioneria — Scritture d'affari — Trasporti e Tariffe — Conti fatti — Monete.

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, pag. IV-360 . . . . . 2 —

Complementi di geometria elementare, del Prof. di C. ALASIA (In lavoro).

Compositore-tipografo (Manuale dell'allievo), di S. LANDI — *vedi* Tipografia, vol. II.

Computisteria, del Prof. V. GITTI:

Vol. I. Compustiteria commerciale, 5ª ediz., (9 e 10° migliaio) di pag. IV-184 . . . . 1 50

Vol. II. Computist. finanziaria, 3ª ediz., pag. VIII-156 . . 1 50

Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, seconda edizione rifatta, di pag. VIII-210 . . . . 1 50

Comuni del Regno d' Italia — *vedi* Dizionario.

Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dal Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210 . . . . 2 —

Conciliatore (Manuale del), dell'AVV. G. PATTACCINI. Guida teorico-pratica con formulario completo pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause. 3ª edizione ampliata dall'autore e messa in armonia con l'ultima legge 28 luglio 1895, di pag. X-465 . . . . 3 —

Concimi, del Prof. A. FUNARO, 2ª edizione rinnovata e accresciuta, di pag. XII-266 . . . . 2 —

Concimi fosfatici — *vedi* Fosfati — Chimica agraria.

Confezione d'abiti — *vedi* Abiti.

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI, di pag. VIII-173, con 141 incisioni e 9 tavole in sincromia. (È in preparazione la 2ª edizione).

Conservazione delle sostanze alimentari, di G. GORINI, 3ª edizione intieramente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. VIII-256 . . . . 2 —

Consigli pratici — *vedi* Ricettario domestico — Industriale — Soccorsi d'urgenza.

ontabilità comunale, secondo le nuove disposizioni legi-

L. c.

slative e regolamentari (Testo unico 10 febbraio 1889 e R. Decr. 6 luglio 1890), del Prof. A. DE BRUN, pag. VIII-186 . 1 50

Contabilità domestica, Nozioni amministrativo-contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, del Rag. O. BERGAMASCHI, di pag. XVI-186 . . . . 1 50

Contabilità generale dello Stato, dell'Avv. E. BRUNI, 2ª edizione rifatta, pag. XVI-420. . . . . 3 —

Contabilità delle istituzioni di p. beneficenza — *vedi* Beneficenza.

Conti e calcoli fatti, dell'Ing. I. GHERSI, 93 tabelle e istruzioni pratiche sul modo di usarle. (Misure, Pesi, Monete, Termometro, Gas e Vapori, Areometri, Alcoolometri, Soluzioni zaccherine, Pesi specifici, Legnami, Carboni, Metalli, Divisioni del tempo, Paga giornaliera, Interessi e Annualità, Rendita, Potenze e Radici, Poligoni e Poliedri regolari, Sfera, Circolo, Divisione della circonf., Pendenza, pag. 204. . 2 50

Contratti agrari — *vedi* Mezzeria.

Conversazione italiana e tedesca (Manuale di), ossia guida completa per chiunque voglia esprimersi con proprietà e speditezza in ambe le lingue, e per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. FIORI, 8ª edizione rifatta da G. CATTANEO, pag. XIV-400 . . . . 3 50

Conversazione italiana-francese — V. *Fraseologia*

Cooperative rurali, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, di acquisto di materie prime, di vendita di prodotti agrari. Scopo, costituzione, norme giuridiche, tecniche, amministrative, computistiche, di V. NICCOLI, pag. VIII-362 . . . . 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di F. VIRGILII, pag. XII-228 . . . . 1 50

Corrispondenza commerciale poliglotta, di G. FRISONI, compilata su di un piano speciale nelle lingue italiana, francese, tedesca, inglese e spagnuola, di cui ciascuna forma in sè stessa l'originale e le altre ne sono la traduzione o la chiave:

I. — **PARTE ITALIANA: Manuale di Corrispondenza Commerciale italiana** corredato di facsimili dei vari documenti di pratica giornaliera, seguito da un GLOSSARIO delle principali voci ed espressioni attinenti al Commercio, agli Affari marittimi, alle Operazioni bancarie ed alla Borsa, ad uso delle Scuole, dei Banchieri. Negozianti ed Industriali di qualunque nazione, che desiderano abilitarsi alla moderna terminologia e nella corretta fraseolagia mercantile Italiana, di pag. XX-444 . . . . . . 4 —

II. — **PARTE SPAGNUOLA: Manual de Correspondencia Comercial Espanola,** accompañado de facsimiles de los varios documentos de uso cotidiano, seguido de un DICCIONARIO Español-Italiano que contiene las principales voces empleados en los Negocios

L. c.

mercantiles y maritimos y los terminos más importantes del Banco, de la Contabilidad y de la Bolsa, compuesto para uso de las Escuelas, de los Banqueros, Negociante é industriales de cualquiera nación que desean habilitarse en la moderna terminología y en la corriente fraseología mercantil española, p. XX-440. 4 —

III. — **PARTE FRANCESE: Manuel de Correspondance commerciale française**, accompagné des fac-similes des differents documents d'usage quotidien, suivi d'un Dictionnaire commercial français-italien contenent les principales expressions du langage mercantil et maritimes et les termes les plus importants de Banque de comptabilité, de Bourse et De Chemins de Fer, à l'usage des Ecoles, des Banquiers, des Négociants et Industriels qui derivent se perfectionner dans la terminologie moderne et dans la phraséologie mercantile française de nos jours, di pagine XVI-446 . . . . 4 —

Corrispondenza in cifre — *vedi* Crittografia.

Corse — *vedi* Dizion. dei termini delle — Cavallo — Proverbi.

Cosmografia. *Uno sguardo all'Universo*, di B. M. LA LETA, pag. XII-197, con 11 incisioni e 3 tavole 1 50

Costituzione degli Stati — *vedi* Diritti e doveri — Ordinam.

Costruttore navale (Manuale del), di G. ROSSI, pag. XVI-517, con 231 fig. intercalate nel testo e 65 tabelle. . . . 6 —

Costruzioni — *vedi* Fabbricati rurali.

Cotoni — *vedi* Prodotti agricoli.

Cremore di tartaro — *vedi* Distillazione.

Cristallo — *vedi* Specchi.

Cristallografia geometrica, fisica e chimica, applicata ai minerali, di E. SANSONI, p. XVI-367, 284 inc. nel testo . 3 —

Cristo — *vedi* Imitazione di Cristo.

Cristoforo Colombo, di V. BELLIO, pag. IV-136 e 10 incis. . 1 50

Crittogame — *vedi* Funghi — Malattie crittogamiche — Tartufi.

Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare e decifrare le corrispondenze segrete. Saggio del conte L. GIOPPI, pag. 177 . . . . 3 50

Cronologia delle Scoperte Geografiche dall'anno 1492 a tutto l'anno 1900 del Prof. L. HUGUES. (In lavoro).

Cronologia — *vedi* Storia e cronologia.

Cubatura dei legnami (Prontuario per la), di G. BELLUOMINI, 4ª ediz. corretta ed accresciuta, pag. 220. . . . . 2 50

Cuoio — *vedi* Concia delle pelli — Imitazioni.

Curiosità — *vedi* Amatore di oggetti d'arte — Maioliche e porcellane — Armi antiche — Autografi.

Curve circolari e raccordi. Manuale pratico per il tracciamento delle curve in qualunque sistema e in qualsiasi caso particolare nelle ferrovie, strade e canali e per il computo generali dei raccordi circolari con speciali applicazioni al tracciamento dei raddoppi del Binario delle derivazioni e degli scambi ferroviari (In sostituzione del manuale del KRÖNHKE), di C. FERRARIO, pag. XI-264, con 94 incis. . . 3 50

L. c.

Dantologia, del Dott. G. A. SCARTAZZINI, 2ª edizione. Vita e Opere di Dante Alighieri, pag. VI-408 . . . . 3 —
Danze — *vedi* Ballo.
Datteri — *vedi* Prodotti agricoli.
Debito (Il) **pubblico italiano.** Regole e modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. AZZONI, pag. VIII-376 3 —
Decorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.
Decorazioni del vetro — *vedi* Specchi — Fotosmaltologia.
Decorazioni e industrie artistiche, dell'Architetto A. MELANI, 2 volumi, dag. XX-460, con 118 incisioni . . . . . 6 —
Denti — *vedi* Igiene della bocca.
Determinanti e applicazioni, di E. PASCAL, pag. VII-330 . 3 —
Diagnostica — *vedi* Semeiotica.
Dialetti italici. Grammatica, iscrizione, versione e lessico, di O. NAZARI, pagine XVI-364 . . . . 3 —
Dialetti letterari greci (epico, neo-ionico, dorico, eolico), del Pof. G. BONINO, pag. XXXII-214 . . . . 1 50
Didattica per gli alunni delle Scuole normali e pei maestri elementari, del Pof. G. SOLI, pag. VIII-314 . . . . 1 50
Digesto (Il), del Prof. G. FERRINI, pag. IV-134 . . . . . 1 50
Dilettanti di pittura — *vedi* Pittura ad olio.
Dinamica elementare, di G. CATTANEO, p. VIII-146, 25 fig. 1 50
Dinamite — *vedi* Esplodenti.
Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche Scuole, del Prof. D. MAFFIOLI, 10ª edizione, (dal 26 al 30° migliaio) con una appendice sul Codice penale, pag. XVI-229 . . . . 1 50
Diritti d'Autore — *vedi* Leggi sui.
Diritto amministrativo, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti tecnici, di G. LORIS, 4ª edizione, pag. XX-521 . . . . 3 —
Diritto civile (Compendio di), del Prof. G. LORIS, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti tecnici, 2ª ediz. riveduta, corretta ed ampliata, pag. XVI-385. . . . . . 3 —
Diritto civile italiano, di C. ALBICINI, p. VIII-128 . . . 1 50
Diritto commerciale italiano, del Prof. E. VIDARI, 2ª edizione diligentemente riveduta, pag. X-448 . . . . . . 3 —
Diritto comunale e provinciale — *vedi* Contabilità comunale — Diritto amministrativo — Legge comunale.
Diritto costituzionale, dell'AVV. Prof. F. P. CONTUZZI, 2ª edizione, pag. XVI-370 . . . . 3 —
Diritto ecclesiastico, di G. OLMO, pagine XII-472. . . . 3 —

L. c.

Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, pagine XVI-322 . . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, pagine XII-320 . . . . 3 —

Diritto penale, dell'Avv. A. STOPPATO, 2ª ediz., (in lavoro)

Diritto penale romano, di C. FERRINI, pag. VIII-360. . . 3 —

Diritto romano, di C. FERRINI, 2ª ediz. rif., pag. XVI-178 . 1 50

Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, Propulsori, per G. GOFFI, 2ª edizione riveduta, pagine XXI-435, con 363 figure . . . . 5 —

Disegno. I principii del Disegno, del Prof. C. BOITO, 4ª edizione, pag. IV-206, con 61 silografie. . . . . 2 —

Disegno (Grammatica del). Metodo pratico per imparare il disegno, di E. RONCHETTI, di pag. VI-190, con 34 figure, 62 schizzi intercalati nel testo e un atlante a parte con 45 lavagnette, 27 foglietti e 34 tavole. (Indivisibili) . . 7 50

Disegno assonometrico, del Prof. P. PAOLONI, pag. IV-122, con 21 tavole e 23 figure nel testo . . . . 2 —

Disegno geometrico, del Prof. A. ANTILLI, 2ª ed., pag. VIII-88, con 6 figure nel testo e 27 tavole litografiche. . . . 2 —

Disegno, Teoria e Costruzione delle Navi, ad uso dei Progettisti e Costruttori di Navi - Capi tecnici, Assistenti e Disegnatori navali - Capi operai carpentieri - Alunni d'Istituti Nautici, di E. GIORLI, pag. VIII-238, con 310 incisioni . . 2 50

Disegno industriale, di E. GIORLI. Corso regolare di disegno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle superfici dei solidi. Della costruzione dei principali organi delle macchine. Macchine utensili. 3ª ediz., pag. VIII-152, con 300 problemi risolti e 448 figure 2 50

Disegno di proiezioni ortogonali, del Prof. D. LANDI, di pagine VIII-152, con 192 incisioni . . . . 2 —

Disegno topografico, del Capitano G. BERTELLI, 2ª ediz., pagine. VI-137, con 12 tavole e 10 incisioni . . . . 2 —

Disinfezione (La pratica della) pubblica e privata per i Dottori P. E. ALESSANDRI e L. PIZZINI, 2ª edizione, pag. VIII-258, con 29 incisioni 2 50

Distillazione delle Vinacce, e delle frutta fermentate. Fabbricazione razionale del Cognac. Estrazione del Cremore di Tartaro ed utilizzazione di tutti i resi-

L. c.

dui della distillazione, di M. DA PONTE, 2ª edizione rifatta, contenenti le leggi italiane sugli spiriti e la legge Austro-Ungarica, pag. XII-375, con 68 incisioni 3 50

Ditteri italiani, di PAOLO LIOY (*Entomologia III*), pag. VII-356, con 227 incisioni . . . . 3 —

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani*, dell'Ing. E. BIGNAMI-SORMANI. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, dell'Ing. C. SCOLARI, pag. XXII-310. . . . . 3 50

Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo, riprodotte con oltre 13000 segni incisi, aggiuntovi un prontuario di *Sigle Epigrafiche.* I monogrammi, la numerizzazione romana ed arabica e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., per cura di ADRIANO CAPPELLI, Archivista-Paleografo presso il R. Archivio di Stato in Milano, pagine LXII-433, con elegante legatura in cromo 7 50

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, pag. 100 . . . . 1 50

Dizionario Biografico Universale, del Professor Dottor G. GAROLLO. (In lavoro).

Dizionario dei comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento del 10 febbraio 1901, compilato da B. SANTI, di pag. XLVI-175 . . . . 3 —

Dizionario Eritreo (Piccolo) **Italiano-Arabo-Amarico,** raccolta dei vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella Colonia Eritrea, di A. ALLORI, pag. XXXIII-203 . . 2 50

Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografica, di J. GELLI, 2ª ediz., con Appendice 1898-99, pag. LXIII-464 . . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi e 600 formule di L. GIOPPI, pag. VIII-600, 95 incisioni e 10 tavole 7 50

Dizionario geografico universale, del Prof. Dott. G. GAROLLO, 4ª edizione del tutto rifatta e molto ampliata, di pagine XII-1451 . . . . 10 —

Dizionario gotico — *vedi* Lingua gotica.

Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di CLETTO ARRIGHI, pag. 912, a 2 colonne, 2ª ediz. 8 50

Dizionario Numismatico — *vedi* Vocabolarietto numismatico.

Dizionario rumeno — *vedi* Grammatica rumena.

Dizionario stenografico. Sigle e abbreviature del sistema Gabelsberger-Noe, di A. SCHIAVENATO, pag. XVI-156 . . 1 50

L. c.

Dizionario tascabile (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** compilato sui migliori vocabolari moderni e provvisto d'un'accurata accentuazione per la pronuncia dell'italiano, di A. FIORI, 3ª edizione, pag. 798, completamente rifatta dal Prof. G. CATTANEO 3 50

Dizionario tecnico in quattro lingue dell'Ing. E. WEBBER, 4 volumi:

Vol. I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. completamente riveduta e aumentata di circa 2000 termini tecnici, pag. XII-553 . . . . 6 —

Vol. II. Deutsch-Italienisch-Französisch-Englisch, (esaurito, è in lavoro la 2ª edizione).

Vol. III. Français-Italien-Allemand-Anglais, pag. 509 . . 4 —

Vol. IV. Englisch-Italian-German-French, pag. 659. . . 6 —

Dizionario (Piccolo) **dei termini delle corse,** di G. VOLPINI, di pagine 47. (Esaurito).

Dizionario turco — *vedi* Grammatica turca.

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca inglese e francese. disposte in unico alfabeto, 1 volume di pag. 1200 a 2 colonne . . . . 8 —

Dizionario Volapük — *vedi* Volapük.

Dogane — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.

Doratura — *vedi* Galvanizzaz. — Galvanostegia — Metallocromia.

Dottrina popolare, in 4 lingue, (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª edizione, pag. IV-112 . . . . . 2 —

Doveri del macchinista navale, e condotta della macchina a vapore marina ad uso dei macchinista navali e degli Istituti nautici, di M. LIGNAROLO, pag. XVI-303 . . . . . 2 50

Drammi — *vedi* Letteratura drammatica.

Duellante (Manuale del) in appendice al *Codice cavalleresco*, di J. GELLI, 2ª edizione, pag. VIII-256, con 26 tavole. . . 2 50

Ebanista — *vedi* Falegname — Modellatore mecc. — Operaio.

Educazione dei bambini — *vedi* Ortofrenia — Sordomuti.

Economia matematica (Introduzione alla), dei Prof. F. VIRGILII e C. GARIBALDI, pag. XII-210, con 19 incisioni . . 1 50

Economia politica, del Prof. W. S. JEVONS, traduzione del Prof. L. COSSA, 4ª ediz. riveduta, pag. XVI-179. . . . . 1 50

Edilizia — *vedi* Fabbric. civili — Ingegneria civ. — Ingegn. leg.

Elettricità, del Prof. FLEEMING JENKIN, traduz. del Prof. R. FERRINI, 3ª ediz. rived., pag. XII-237, con 40 incisioni . 1 50

Elettrochimica (Prime nozioni elementari di), del Professor A. COSSA. pagine VIII-104, con 10 incisioni 1 50

L. c.

Elettrotecnica (Manuale di), di GRAWINKEL-STRECKER, traduzione italiana dell'Ing. FLAVIO DESSY, pagine XVI-816, con 346 figure 9 50

Ematologia — *vedi* Malattie del sangue.

Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. CATTANEO, pag. X-242, con 71 incisioni 1 50

Enciclopedia del giurista — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia.

Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 grossi vol. di 3375 pag. di 2 col. per ogni pag., con Appendice (146740 voci) . . . . 20 —

Energia fisica, del Prof. R. FERRINI, pag. VIII-187, con 47 incisioni. 2ª edizione interamente rifatta 1 50

Enimmistica. Guida per comporre e per spiegare Enimmi, Sciarade, Anagrammi, Logogrifi, Rebus, ecc., di D. TOLOSANI (Bajardo), pag. XII-516, con 29 illustr. e molti esempi 6 50

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Professor O. OTTAVI, 4ª edizione interamente rifatta da A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, dell'Ing. agr. R. BASSI, pag. XVI-304, con 38 incisioni 2 50

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, pag. VIII-233 . 2 —

Entomologia di A. GRIFFINI E P. LIOY, 4 volumi (*vedi* Coleottori — Ditteri — Lepidotteri — Imenotteri).

Epigrafia latina. Trattato elementare con esercizi pratici e facsimili, con 65 tav. del Prof. S. RICCI. pag. XXXII-448 . 6 50

— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.

Epilessia, Eziologia, Patogenesi, Cura, Dr. P. PINI, p. X-277 2 50

Eritrea (L') dalle sue origini a tutto l'anno 1901. Appunti cronistorici con annessi 1 carta ed 1 schizzo, un'appendice di note geografiche e statistiche e di cenni sul Benadir e sui viaggi d'esploraz. di B. MELLI, di pag. XII-164 2 —

Eritrea — *vedi* Arabo parlato — Dizionario eritreo, — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Prodotti agricoli del Tropico — Tigrè italiano.

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, 2ª edizioue accresciuta, pag. XII-196 . . . . 1 50

Esame degli infermi — *vedi* Semeiotica.

Esattore comunale (Manuale dell'), ad uso anche dei Ricevitori provinciali, Messi esattoriali, Prefetti, Intendenti di finanza, Agenti imposte, Sindaci e Segretari dei Comuni, Avvocati, Ingegneri, Ragionieri, Notai e Contribuenti, del Rag. R. MAINARDI, 2ª ediz. rived. e ampl., pag. XVI-480 . 5 50

Esercizi geografici e quesiti, sull'Atlante geografico universale di R. Kiepert, di L. HUGUES, 3ª ediz. rifatta di pagine VIII-208 . . . . 1 50

Esercizi sulla geometria elementare, del Prof. S. PINCHERLE, pag. VIII-130, con 50 incisioni 1

L. c.

Esercizi greci, per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elemen. di lingua greca*, del Prof. V. INAMA: del Prof. A. V. BISCONTI, 2ª ediz. rifatta, di p. XXVI-234 . 3 —
Esercizi latini con regole (Morfologia generale), del Prof. P. E. CERETI, pag. XII-332. . . . . 1 50
Esercizi di stenografia — *vedi* Stenografia.
Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, del Prof. G. PRAT, pag. VI-183 . . . . 1 50
Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica tedesca, di G. ADLER, 2ª ed., p. VIII-234. 1 50
Esercizi ed applicazione di Trigonometria piana, con 400 esercizi e problemi proposti dal Prof. C. ALASIA, pag. XVI-292, con 30 incisioni 1 50
Esplodenti e modo di fabbricarli, di R. MOLINA, p. XX-300 2 50
— *vedi anche* Pirotecnica.
Espropriazione — *vedi* Ingegneria legale.
Essenze — *vedi* Profumiere — Liquorista — Ricettario ind.
Estetica, del prof. M. PILO, di pag. XX-260 . . . . . . 1 50
Estimo di cose d'arte — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di Maioliche e Porcellane.
Estimo dei terreni. Garanzia dei prestiti ipotecari e della equa ripartizione dei terreni, dell'Ing. P. FILIPPINI, pag. XVI-328, con 3 incisioni. . . . . 3 —
Estimo rurale, del Prof. CAREGA DI MURICCE, pag. VI-164. 2 —
Etica, (Elementi di) del Prof. G. VIDARI, di pag. XVI-334 . 3 —
Etnografia, di B. MALFATTI, 2ª ediz. inter. rifusa, p. VI-200. 1 50
Evoluzione (Storia dell'), del Prof. CARLO FENIZIA, con breve saggio di Bibliografia evoluzionistica, pag. XIV-389 . . 3 —
Fabbricati civili di abitazione, dell'Ing. C. LEVI, 2ª ediz. rifatta, con 207 incis., e i Capitolati d'oneri approvati dalle principali città d'Italia, pag. XVI-412 . . . . 4 50
Fabbricati rurali (Costruzione ed economia dei). 2ª edizione rifatta dall' " Economia dei fabbricati rurali ", di V. NICCOLI, di pag. XVI-335, con 125 figure 3 50
Fabbro — *v.* Aritmetica dell'operaio — Fonditore — Meccanico — Operaio — Tornitore.
Fabbro-ferraio (Manuale pralico del), di G. BELLUOMINI, opera necessaria ed indispensabile ai fabbri fucinatori, agli aggiustatori meccanici, armajuoli, carrozzieri, carradori, calderai, coltellinai, fumisti, costruttori di strumenti metrici, di serrature, di arnesi rurali, di ferramenti in genere ed a tutti quelli che si dilettano nei lavori in ferro ed in acciaio, di pag. VIII-242, con 224 incisioni . . . 2 50
Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, di pag. X-138, con 42 incisioni . . . 2 —

L. c.

Fanciulli — (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.) *v.* Ortofremia.
Farfalle — *vedi* Lepidotteri.
Farmacista (Manuale del), del Prof. P. E. ALESSANDRI, 2ª edizione interamente rifatta e aumentata, corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, alterazioni, falsificazioni, usi, dosi, ecc., pag. XVI-731, con 142 tavole e 82 incisioni 6 50
Farmacoterapia e formulario, del Dott. P. PICCININI, di pag. VIII-382 . . . . 3 50
Ferrovie — *vedi* Codice doganale — Curve — Ingegneria legale Macchin. e Fuochista — Trasporti e tariffe.
Filatelia — *vedi* Dizionario filatelico.
Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. GROTHE, traduzione sull'ultima tedesca, pag. VIII-414, con 105 incisioni . . . . 5 —
Filatura della seta, di G. PASQUALIS. (In lavoro).
Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. INAMA, di pag. XII-195 . . . . 1 50
Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolorio tecnico più in uso nel panfiliamento, del Cap. G. OLIVARI, pag. XVI-286 . . 2 50
Filosofia morale, del Prof. L. FRISO, pag. XVI-336 . . . 3 —
Fillossera e le principali malattie crittogamiche della vite con speciale riguardo ai mezzi di difesa, del Dott. V. PEGLION, pag. VIII-302, con 39 incisioni . . . . 3 —
Filugello — *vedi* Bachi da seta.
Fiori artificiali, Manuale del fiorista, di O. BALLERINI, pag. XVI-278, con 144 incisioni, e 1 tav. a 36 colori . . . 3 50
— *vedi anche* Pomologia artificiale.
Fisica, del Prof. O. MURANI, con 243 incisioni e 3 tavole, 6ª edizione, completamente rifatta del Manuale di Fisica di BALFOUR STEWART pag. XVI-411 . . . . 2 —
Fisica cristallografica, W. VOIGT, trad. A. SELLA. (In lav.).
Fisiologia, di FOSTER, traduzione del Prof. G. ALBINI, 3ª edizione, pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50
Fisiologia comparata — *vedi* Anatomia.
Fisiologia vegetale, del Dott. LUIGI MONTEMARTINI, pag. XVI-230, con 68 incisioni 1 50
Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, 3ª edizione riveduta da G. RODA, pag. VIII-256, con 87 incisioni . . 2 —
Florilegio poetico greco, del Prof. V. INAMA. (In lavoro).
Flotte moderne (Le) 1896-1900, di E. BUCCI DI SANTAFIORA. Complemento del Manuale del Marino, del C. DE AMEZAGA, pagine IV-204 . . . .

L. c.

Fognatura cittadina, dell'Ing. D. SPATARO, pag. X-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia . . . . 7 —

Fognatura domestica, dell'Ing. A. CERUTTI, pag. VIII-421, con 200 incisioni . . . . 4 —

Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, 2ª edizione, pag. VIII-150, con 41 incisioni . . . . 2 —

Fonologia italiana, di L. STOPPATO, pag. VIII-102. . . . 1 50

Fonologia latina, del Prof. S. CONSOLI, pag. 208 . . . . 1 50

Foreste — *vedi* Ingegneria legale — Selvicoltura.

Formaggio — *vedi* Caseificio — Latte, burro e cacio.

Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. ROSSOTTI, di pag. XVI-192 . . . . 1 50

Fosfati, perfosfati e concimi fosfatici. Fabbricazione ed analisi del Prof. A. MINOZZI (In lav.).

Fotocalchi — *vedi* Arti grafiche — Chimica fotografica — Fotografia industriale — Processi fotomeccanici.

Fotocollografia — *vedi* Processi fotomeccanici.

Fotocromatografia (La), del Dott. L. SASSI, pag. XXI-138, con 19 incisioni . . . . 2 —

Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per la riproduzione di disegni, piani, carte, musica, negative fotografiche, ecc., del Dott. LUIGI GIOPPI, pag. VIII-208, con 12 incisioni e 5 tavole fuori testo. 2 50

Fotografia ortocromatica, del Dott. C. BONACINI, pagine XVI-277, con incisioni e 5 tavole 3 50

Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole), di G. MUFFONE, 5ª edizione rifatta ed ampliata, pag. XX-383, con 99 incisioni e 11 tavole. . . . . 3 —

Fotogrammetria, Fototopografia praticata in Italia e applizione della fotogrammetria all'idrografia, dell'Ing. P. PAGANINI. pag. XVI-288, con 56 figure e 4 tavole. . . . 3 50

Fotolitografia — *vedi* Arti grafiche — Processi fotomecc.

Fotosmaltografia (La), applicata alla decorazione industriale delle ceramiche e dei vetri, di A. MONTAGNA, pag. VIII-200, con 16 incisioni nel testo . . . . 2 —

Fototerapia e radiografia di A. BELLINI (In lavoro).

Fototipografia — *vedi* Arti grafiche — Processi fotomecc.

Fragole *vedi* Frutta minori.

Francia — *vedi* Storia della Francia.

Francobolli — *vedi* Dizionario filatelico.

Fraseologia francese-italiana, di E. BAROSCHI SORESINI, pag. VIII-262 . . . . 2 50

Fraseologia italiana-tedesca — *vedi* Conversazione — Dottrina popolare.

Frenastenia — *vedi* Ortofrenia.

L. c.

Frumento (Il), (come si coltiva o si dovrebbe coltivare in Italia) di E. AZIMONTI, 2ª edizione completamente rifatta del Manuale " Frumento e mais „ di G. CANTONI, di pagine XVI-276 . . . . 2 50

Frutta minori. Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, del Prof. A. PUCCI, pag. VIII-193, con 96 incisioni . . 2 50

Frutta fermentate — *vedi* Distillazione

Frutticoltura, del Prof. Dott. D. TAMARO, 3ª edizione, di pag. XVIII-219, con 81 incisioni . . . . 2 —

Frutti artificiali — *vedi* Pomologia artificiale.

Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. CANESTRINI, pag. VIII-166, con 6 incisioni . . . . 2 —

Funghi mangerecci e funghi velenosi, del Dott. F. CAVARA, di pag. XVI-192, con 43 tavole e 11 incisioni . . 4 50

Funzioni analitiche (Teoria delle), di G. VIVANTI, pagine VIII-432 (volume doppio) . . . . 3 —

Funzioni ellittiche, del Prof. E. PASCAL, pag. 240 . . . 1 50

Fuochista — *vedi* Macchinista e fuochista.

Fuochi artificiali — *vedi* — Esplodenti — Pirotecnia

Gallinacei — *vedi* Animali da cortile — Colombi — Pollicoltura.

Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli e galvanoplastica in generale. Manuale pratico per l'industriale e l'operaio riguardante la nichelatura, ramatura, ottonatura, doratura, argentatura, stagnatura, zincatura, acciaiatura, antimoniatura, cobaltatura, ossidatura, galvanoplastica in rame, argento, oro, ecc., in tutte le varie applicaz. pratiche, di F. WERTH, di p. XVI-324, con 153 inc. 3 50

Galvanoplastica ed altre applicazione dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. FERRINI, 3ª edizione, completamente rifatta, pag. XII-417, con 45 incisioni . . . . . 4 —

Galvanostegia, dell' Ing. I. GHERSI. Nichelatura, argentatura, doratura, ramatura, metallizzazione, ecc. pag. XII-324, con 4 incisioni 3 50

Gastronomia (Terminologia gastronomica italiana e francese) di E. BORGORELLO, con 300 Menus. (In lavoro).

Gaz illuminante (Industria del), di V. CALZAVARA, pag. XXXII-672, con 375 incisioni e 216 tabelle 7 50
— *vedi* Incandescenza a gaz.

Gelsicoltura, del Prof. D. TAMARO, pag. XVI-175 e 22 inc. 2 —

Geografia, di G. GROVE, traduzione del Prof. G. GALLETTI, 2ª edizione riveduta, pag. XII-160, con 26 incisioni . . 1 50

L. c

Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5ª edizione, pag. IV-168 . . . . . 1 50

Geografia commerciale economica. *Europa, Asia, Oceania, Africa, América,* di P. LANZONI, pag. VIII-344. . . . 3 —

Geografia fisica, di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, 3ª edizione, pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, quarta edizione, riveduta sull'ultima edizione inglese da G. MERCALLI, pag. XII-176, con 47 incisioni 1 50

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, pag. VI-196, con 11 incisioni. 1 50

Geometria analitica del piano, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva, del Prof. ASCHIERI, pag. VI-222, con 103 incisioni, 2ª edizione rifatta. 1 50

Geometria elementare — *vedi* Esercizi di Geometria pura — Problemi di Geometria elementare.

Geometria e trigonometria della sfera, del Prof. C. ALASIA, pag. VIII-208, con 34 incisioni 1 50

Geometria metrica e trigonometria, del Prof. S. PINCHERLE, 5ª edizione, pag. IV-158, con 47 incisioni. . . 1 50

— *vedi anche* Esercizi di Trigonometria.

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. EREDE, 3ª edizione riveduta ed aumentata, pag. XII-258, con 134 incis. . . 2 —

Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. ASCHIERI, 2ª edizione, pag. VI-228, con 86 incisioni. . 1 50

Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, 2ª edizione rifatta, pag. VI-264, con 16 incisioni . . . 1 50

Geometria pura elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 5ª edizione, con l'aggiunta delle figure sferiche, pag. VIII-176, con 121 incisioni 1 50

Giardino (Il) **infantile,** di P. CONTI, pag. IV-213, 27 tav. 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, pag. VIII-181 . 1 50

Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, pag. VI-112, 67 ill. 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. GELLI, pag. VIII-108, con 216 incisioni . . . . 2 —

— *vedi anche* Giuochi ginnastici.

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. BOSELLI, pag. 336, con 125 incisioni. . . . . 4 —

— *vedi anche* Metalli preziosi — Pietre preziose.

L. c.

Giuochi ginnastici per la gioventù delle Scuole e del popolo, raccolti e descritti. di F. GABRIELLI, pag. XX-218, con 24 tavole illustrative 2 50
Giustizia amministrativa (Man. di), di G. VITTA. (In lav.).
Glottologia, del Prof. G. DE GREGORIO, pag. XXXII-318 . 3 —
Gnomonica ossia **l'arte di costruire orologi solari,** lezioni popolari di B. M. LA LETA, pag. VIII-160, con 19 figure. 2 —
Gomma elastica — *vedi* Imitazioni.
Grafologia, di C. LOMBROSO, pag. V-245 e 470 fac-simili. 3 —
Grammatica albanese con le poesie rare di Variboda, del Prof. V. LIBRANDI, pag. XVI-200 . . . . 3 —
Grammatica Araba — *vedi* Arabo parlato.
Grammatica araldica - *vedi* Araldica — Vocabolario araldico.
Grammatica ed esercizi pratici della lingua danese-norvegiana con un supplemento contenente le principali espressioni tecnico-nautiche ad uso degli ufficiali di marina che frequentano i mari del nord e gli stretti del Baltico, di G. FRISONI, pag. XX-488. . . . . 4 50
Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica, del Prof. I. LEVI fu ISACCO, pag. 192 . . . . 1 50
Grammatica francese, del Prof. G. PRAT, seconda edizione riveduta, pag. XII-299 . . . . 1 50
Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. VITERBO:
Vol. I. Galla-Italiano, pag. VIII-152 . . . . 2 50
Vol. II. Italiano-Galla, pag. LXIV-106 . . . . 2 50
Grammatica gotica — *vedi* Lingua gotica.
Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), del Prof. INAMA. 2ª edizione, pag. XVI-208 . . . . . 1 50
Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. LOVERA, pag. VI-154 . . . . 1 50
Grammatica inglese, del Prof. L. PAVIA, pag. XII-260 . 1 50
Grammatica italiana, del Prof. T. CONCARI, 2ª edizione riveduta, pag. XVI-230 . . . . 1 50
Grammatica latina, del Prof. L. VALMAGGI, seconda edizione, pag. VIII-256 . . . . 1 50
Grammatica della lingua olandese, di M. MORGANA, di pagine VIII-124 . . . . 3 —
Grammatica ed esercizi pratici della lingua portoghese-brasiliana, del Prof. G. FRISONI, pag. XII-267 . . . . 3 —
Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. LOVERA, pag. VIII-200. . . . .

L. c.

Grammatica russa, del Prof. VOINOVICH, pag. X-272 . . 3 —
Grammatica sanscrita — *vedi* Sanscrito.
Grammatica della lingua slovena. Esercizi e vocabolario del Prof. BRUNO GUYON, pag. XVI-314 . . . . 3 —
Grammatica spagnuola, del Prof. PAVIA, 2ª edizione, di pagine XVIII-272 . . . . 1 50
Grammatica della lingua svedese, del Prof. E. PÀROLI, pagine XV-293 . . . . 3 —
Grammatica tedesca, del Prof. L. PAVIA, 2ª edizione, di pagine XVIII-272 . . . . 1 50
Grammatica Tigré — *vedi* Tigrè italiano.
Grammatica turca osmanli, con paradigmi, crestomazia, e glossario, di L. BONELLI, pag. VIII-200 e 5 tavole . . 3 —
Grandine — *vedi* Assicurazioni.
Granturco — *vedi* Frumento e mais — Industria dei molini.
Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare, di Sir G. B. AIRY, traduzione di F. PORRO, con 50 incisioni, pag. XXII-176 . . 1 50
Grecia antica — *vedi* Archeologia (Arte greca) — Mitologia greca — Monete greche — Storia antica.
Gruppi di trasformazione (Teoria dei), di E. PASCAL. (In lavoro).
Guttaperca — *vedi* Imitazioni.
Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali,** del Prof. A. CASALI, pag. XVI-210 . . . . 2 —
Idraulica, di T. PERDONI, di pag. XXVIII-392, con 301 figure e 3 tavole 6 50
Idrografia — *vedi* Fotogrammetria.
Idroterapia, di G. GIBELLI, pag. IV-238, con 30 incis.. . 2 —
— *vedi anche* Acque minerali e termali del Regno d'Italia.
Igiene della Bocca e dei Denti, nozioni elementari di Odontologia, del Prof. Dott. L. COULLIAUX, di pagine XVI-330, con 23 incisioni 2 50
Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI, pagine VIII-262, con 70 incisioni 2 50
Igiene della pelle, di A. BELLINI, pag. XVI-240, 7 incis. . 2 —
Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª edizione italiana curata dal Dott. GIOV. GALLI, pag. XVI-272 . . . . 2 50
Igiene rurale, di A. CARRAROLI, pagine X-470 . . . . 3 —
Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª ediz., pag. IV-246. . 2 —
Igiene veterinaria, del Dott. U. BARPI, pag. VIII-228 . . 2 —

L. c.

Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, del Dott. A. LOMONACO, pag. XII-272. . . . . 2 50

Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. FARALLI, di pag. XII-250 . . . . 2 50

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. CANTONI, pag. XII-142, con 24 incisioni e 7 tabelle . . 1 50

Illuminazione — *vedi* Acetilene — Gaz. illum. — Incandescenza.

Illuminazione elettrica (Impianti di), Manuale pratico dell'Ing. E. PIAZZOLI, 5ª ediz. interamente rifatta, (9-10 migliaio) seguita da un'appendice contenente la legislazione Italiana relativa agli impianti elettrici, di pag. 606, con 264 incisioni, 90 tabelle e 2 tavole 6 50

Imbalsamatore — *vedi* Naturalisia preparatore — Naturalista viaggiatore — Zoologia.

Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, del Dott. E. GRIFFINI (Entomologia IV), pag. XVI-687, con 243 incisioni 4 50

Imitazione di Cristo (Della), Libri quattro di GIO. GERSENIO, volgarizzamento di CESARE GUASTI, con proemio e note di G. M. ZAMPINI, pag. LVI-396 . . . . . . 3 50

Imitazioni e succedanei dell'ing. I. GHERSI. (In lavoro).

Immunità e resistenza alle malattie, di A. GALLI VALERIO, pag. VIII-218. . . . . 1 50

Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi, Manuale di terapeutica del Dott. G. MALACRIDA, pag. 305 . . . 3 —

Imposte dirette (Riscossione delle), dell'Avv. E. BRUNI, di pag. VIII-158 . . . . 1 50

Incandescenza a gaz, (Fabbricazione delle reticelle) di L. CASTELLANI, pag. X-140, con 33 incisioni. . . . . 2 —

Inchiostri — *vedi* Ricettario industriale — Vernici ecc.

Incisioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.

Indovinelli — *vedi* Enimmistica.

Industrie (Piccole). Scuole e musei industriali - Industrie agricole e rurali - Industrie manifatturiere ed artistiche, dell'Ing. I. GHERSI, 2ª edizione completamente rifatta del Manuale delle *Piccole Industrie* del Prof. A. ERRERA, pag. XII-372. . . . . 3 50

Infermiere — *vedi* Assistenza degli infermi — Soccorsi d'urgenza — Tisici e sanatorii.

Infanzia — *vedi* Terapia delle malattie dell' — Giardino infantile — Nutrizione — Ortofrenia — Sordomuto.

Infezione — *vedi* Disinfezione — Medicatura antisettica.

Infortunii sul lavoro — *vedi* Legge sugli.

L. c.

Infortunii della montagna (Gli). Manuale pratico degli Alpinisti, delle guide e dei portatori, del Dott. O. BERNHARD, traduzione con aggiunte del Dott. R. CURTI, di pag. XVIII-60, con 65 tav. e 175 figure dimostrative . . 3 50

Infortuni sul lavoro, (Mezzi tecnici per prevenirli) di E. MAGRINI. (In lavoro).

— *vedi anche* Leggi per gli.

Ingegnere agronomo — *vedi* Agronomia — Prontuario dell'agric.

Ingegnere civile. Manuale dell'ingegnere civile e industriale, del Prof. G. COLOMBO, 19ª edizione modificata e aumentata, (49°, 50° e 51° migliaio), con 221 fig., pag. XIV-423. 5 50

Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC . 5 50

Ingegnere navale. Prontuario di A. CIGNONI, pag. XXXII-292, con 36 figure. Legato in pelle 5 50

Ingegneria legale per tecnici e giuristi (Manuale di), dell'Avv. A. LION. Commento ed illustrazione con la più recente giurisprudenza: Responsabilità - Perizia - Servitù - Piani regolatori e di ampliamento - Legge di sanitá - Regolamenti d'igiene ed edilizii - Espropriazione - Miniere - Foreste - Catasto - Privativa industriale - Acque - Strade - Ferrovie - Tramvay - Bonifiche - Telefoni - Appalti - Riparazioni - Cimiteri - Derivazioni di acque pubbliche - Monumenti d'arte e d'antichità, ecc., pag. VIII-552 . . . . . 5 50

Inghilterra — *vedi* Storia d'Inghilerra.

Insegnamento (L') dell'Italiano nelle Scuole Secondarie. Esposizione teorico-pratica con esempi, del Prof. C. TRABALZA (In lavoro).

Insetti nocivi, del Prof. F. FRANCESCHINI, pag. VIII-264, con 96 incisioni . . . . 2 —

Insetti utili, del Prof. F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 43 incisioni e 1 tavola . . . . 2 —

Interesse e sconto, del Prof. E. GAGLIARDI, 2ª edizione rifatta e aumentata, pagine VIII-198 . . . . 2 —

Inumazioni — *vedi* Morte vera.

Ipnotismo — *vedi* Magnetismo — Spiritismo — Telepatia.

Ipoteche (Man. per le), di A. RABBENO, pag. XVI-247 . . . 1 50

Ittiologia italiana, del Dott. A. GRIFFINI, con molte incisioni. (In lavoro).

— *vedi anche* Piscicoltura — Ostricoltura.

Lacche — *vedi* Vernici ecc.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. SARTORI, pag. X-162, con 24 incisioni . 2 —

Lavori femminili — *vedi* { Abiti per signora. Biancheria. Macchine da cucire. Monogrammi. Trine a fuselli.

— *vedi* Leggi sui lavori pubblici.

L. c.

Lavori in terra (Manuale di), dell'Ing. B. LEONI, pag. XI-305, con 38 incisioni . . . . 3 —

Lawn-Tennis, di V. BADDELEY, prima traduzione italiana con note e aggiunte del trad., pag. XXX-206, con 13 illustr. 2 50

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata da E. MAZZOCCOLO, 4ª edizione, interamente rifatta con l'aggiunta del regolamento e di 2 indici, pag. XII-820 . . . 7 50

Legge sui lavori pubblici e regolamenti, di L. FRANCHI, pag. IV-110-CXLVIII 1 50

Legge sull'ordinamento giudiziario, dell'Avv. L. FRANCHI, pag. IV-92-CXXVI 1 50

Leggi e convenzioni sui diritti d'autore — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia, vol. III.

Leggi per gl'infortunii sul lavoro, dell'Avv. A. SALVATORE, pag. 312 . . . . 3 —

Leggi e convenzioni sulle privative industriali, disegni, modelli di fabbrica, marchi di fabbrica e di commercio, di L. FRANCHI. (In lavoro).

Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica, di L. FRANCHI, pag. IV-108-XCII 1 50

Leggi sulle tasse di Registro e Bollo, con appendice, del Prof. L. FRANCHI, pag. IV-124-CII 1 50

Leggi usuali d'Italia — *vedi* Codici e leggi.

Leghe metalliche ed amalgame, alluminio, nichelio, metalli preziosi e imitazione, bronzo, ottone, monete e medaglie, saldature, dell'Ing. I. GHERSI, p. XVI-431, con 15 inc. 4 —

Legislazione delle acque di D. CAVALLERI, di pag. XV-274 2 50

Legislazione Mortuaria — *vedi* Morte.

Legislazione sanitaria italiana, (La nuova) di E. NOSEDA. di pag. VIII-570 . . . . 5 —

Legislazione rurale, secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici, dell'Avv. E. BRUNI, pag. XI-423 . . 3 —

Legnami — *vedi* Cubatura dei legnami — Falegname.

Legno artificiale — *vedi* Imitazioni.

Lepidotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI (Entomol. II), pag. XIII-248, con 149 incisioni. 1 50

Letteratura albanese (Manuale di), del Prof. A. STRATICÒ, pag. XXIV-280 . . . . 3 —

Letteratura americana, di G. STRAFFORELLO, pag. 158 1 50

Letteratura araba, del Prof. I. PIZZI. (In lavoro).

Letteratura assira, del Mott. B. TELONI. (In lavoro).

Letteratura catalana, del Prof. RESTORI. (In lavoro).

Letteratura danese — *vedi* Letteratura norvegiana

Letteratura drammatica, di C. LEVI, pag. XII-339 . . . 3

L. c.

Lingue dell'Africa, di R. CUST, versione italiana del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110 . . . . 1 50

Lingua latina *vedi* Dizionario di abbreviature latine — Epigrafia — Esercizi — Filologia classica — Fonologia — Grammatica — Letteratura romana — Metrica — Verbi.

Lingue germaniche — *vedi* Grammatica danese-norvegiana inglese, olandese, tedesca, svedese.

Lingua Turca Osmanli — *vedi* Grammatica.

Lingue neo-latine, del Dott. E. GORRA, pag. 147. . . . 1 50

Lingue straniere (Studio delle), di C. MARCEL, ossia l'arte di pensare in una lingua straniera, traduzione del Prof. DAMIANI, di pag. XVI-136 . . . . 1 50

Linoleum — *vedi* Imitazioni.

Liquorista, di A. ROSSI, con 1270 ricette pratiche. Materiale, Materie prime, Manipolazioni, Tinture, Essenze naturali ed artificiali, Fabbricazione dei liquori per macerazione, digestione, distillazione, con essenze, tinture, ecc., Liquori speciali, Vini aromatizzati, pag. XXXII-560, con 19 incisioni nel testo . . . . 5 —

Litografia, di C. DOYEN, di pag. VIII-261, con 8 tavole e 40 figure di attrezzi, ecc., occorrenti al litografo . . . 4 —

Liuto — *vedi* Chitarra — Mandolinista — Strum. ad arco.

Logaritmi (Tavole di), con 6 decimali, di O. MÜLLER, 6ª ediz., aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. RAINA, di pagine XXXVI-191. (11, 12, 13° migliaio) 1 50

Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. del Prof. C. CANTONI, 5ª ediz. di pag. VIII-166, con 15 incisioni. . . . 1 50

Logica matematica, del Prof. C. BURALI-FORTI, p. VI-158. 1 50

Logismografia, di C. CHIESA, 3ª ediz., pag. XIV-172 . . 1 50

Logogrifi — *vedi* Enimmistica.

Lotta — *vedi* Pugilato.

Luce e colori, del Prof. G. BELLOTTI, pag. X-157, con 24 incisioni e 1 tavola 1 50

Luce e suono, di E. JONES, traduzione di U. FORNARI, di pag. VIII-336, con 121 incisioni. . . . . 3 —

Macchine a vapore, (Manuale del costruttore di), di H. HAEDER. Edizione italiana compilata sulla 5ª edizione tedesca, con notevoli aggiunte dell'Ing. E. WEBBER, pag. XVI-452, con 1444 incisioni e 244 tabelle, legato in bulgaro rosso . 7 —

Macchine agricole, del Conte A. CENCELLI-PERTI, di pag. VIII-216, con 68 incisioni . . . . ?

L. c.

Macchine per cucire e ricamare, dell'Ing. ALFREDO GALASSINI, pag. VII-230, con 100 incisioni 2 50

Macchinista e fuochista, del Prof. G. GAUTERO, 8ª ediz. con Appendice sulle Locomobili e le Locomotive dell'Ing. Prof. LORIA, e col Regolamento sulle caldaie a vapore, pag. XX-194, con 34 incisioni . . . . 2 —

Macchinista navale (Manuale del), di M. LIGNAROLO, 2ª ed. rifatta, pag. XXIV-602, con 344 incisioni 7 50

Macinazione — *vedi* Industrie dei molini — Panificazione.

Magnetismo ed elettricità. Principî e applicazioni esposti elementarmente, del Prof. F. GRASSI. 3ª ediz. completamente rifatta del manuale di POLONI e GRASSI, di pagine XVI-508, con 280 figure 6 tavole fuori testo . . . 5 50

Magnetismo ed ipnotismo, Prof. G. BELFIORE, p. VIII-378 . 3 50

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, del Prof. E. MARCHI, 2ª ediz., pag. XX-736, con 190 incisioni e una Carta 6 50

Maioliche e porcellane (L'amatore di), di L. DE MAURI, illustrato da splendide *incisione in nero*, da *12 superbe tavole a colori* e da *3000 marche*. - Contiene: Tecnica della fabbricazione - Sguardo generale sulla storia delle Ceramiche dai primi tempi fino ai giorni nostri - Cenni storici ed artistici su tutte le fabbriche - Raccolte di 3000 marche corredate ognuna di notizie relative, e coordinate ai Cenni Storici in modo che le ricerche riescano di *esito immediato* - Dizionario di termini Artistici aventi relazione coll'Arte Ceramica e di oggetti Ceramici speciali, coi prezzi correnti. Bibliografia ceramica, indici vari, pag. XII-650 . . . . . 12 50

Mais (Il) o granoturco, o formentone, o granone, o melgone, o melica, o melicotto, o carlone, o polenta, ecc. Norme per una buona coltivazione, di E. AZIMONTI, 2ª edizione rifatta dal Manuale " Frumento e Mais " di E. CANTONI, di pag. XII-196 con 61 incisioni nel testo 2 50

Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dott. R. WOLF, traduzione con note ed aggiunte del Dott. P. BACCARINI, pag. X-268, con 50 incisioni . . . . . . 2 —

Malattie ed alterazione dei vini, del Prof. S. CETTOLINI, di pag. XI-138, con 13 incisioni. . . . . 2 —

Malattie della vite — *vedi* Filossera — Malattie crittogamiche.

Mammiferi — *vedi* Zoologia.

Mandarini — *vedi* Agrumi.

Malattie del sangue. Manuale d'Ematologia del Dott. E. REMSCHINI, pag. VIII-432 . . . . 3 50

to [illegible] di E. VIDARI, pag. VI-160. . . . 1 50

Lavo [illegible]

L. c.

Mandolinista (Manuale del), di A. PISANI, pag. XX-140, con 13 figure, 3 tavole e 39 esempi. . . . . 2 —

Manicomio — *vedi* Assistenza pazzi — Psichiatria.

Manzoni Alessandro. Cenni biografici, di L. BELTRAMI, di pag. 109, con 9 autografi e 68 incisioni. 1 50

Marche di Fabbrica — *vedi* Amatore oggetti d'arte — Leggi sulle proprietà — Majoliche.

Mare (Il). V. BELLIO, pag. IV-140, con 6 tav. lit. a colori. 1 50

Marine (Le) **da guerra del mondo al 1897,** di L. D'ADDA, pag. XVI-320, con 77 illustrazioni 4 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** del Contr'ammiraglio DE AMEZAGA, con 18 xilografie, 2ª edizione, con appendice di BUCCI DI SANTAFIORA . . . . 5 —

Marmista (Manuale del), di A. RICCI, 2ª edizione, pag. XII-154, con 47 incisioni . . . . 2 —

Marmo — *vedi* Imitazioni.

Massaggio, del Dott. R. MAJNONI, p. XII-179, con 51 inc. . 2 —

Mastici — *vedi* Ricettario industriale — Vernici, ecc.

Matematiche superiori (Repertorio di). Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici, del Prof. E. PASCAL.

Vol. I. *Analisi*, pag. XVI-642 . . . . 6 —

Vol. II. *Geometria*, e indice gen. per i 2 vol. pag. 950 9 50

Materia medica moderna (Man. di), G. MALACRIDA, p. XI-761 7 50

Materiali artificiali — *v.* Ricettario indust. — Imitaz. e succedanei.

Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduzione del Prof. J. BENETTI, 4ª edizione, pag. XVI-214, con 89 inc.. 1 5

Meccanica (La) **del macchinista di bordo,** per gli Ufficiali macchinisti della R. Marina, i macchinisti delle Compagnie di navigazione, i Costruttori e i Periti meccanici, gli Allievi degli Istituti Tecnici e Nautici e delle Scuole Industriali e Professionali, di E. GIORLI, con 92 fig. (In lavoro).

Meccanico (Il), ad uso dei macchinisti, capi tecnici, elettricisti, disegnatori, assistenti, capi operai, conduttori di caldaie a vapore, alunni di Scuole industriali, di E. GIO[...] 3ª edizione ampliata, pag. VII-370, con 205 incision[...]

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recen[...] rentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pne[...] macchine a vapore, molini. torchi, orologerie, e[...] T. BROWN, trad. d. Ing. F. CERRUTI, 3ª edizion[...] pag. VI-176, con 500 incisioni 2 50

Medaglie — *vedi* Leghe metalliche — Monete greche [...] romane — Numismatica — Vocabolarietto dei n[...]

Medicatura antisettica, del Dott. A. ZAMBL[...] zione del Prof. E. TRICONI [...]n 6 incis. . 1 50

L. c.

Medicina operativa — *vedi* Chirurgia.

Medico pratico, (Il) di C. Muzio. 3ª edizione del Nuovo memoriale pei medici pratici, di pag. XVI-492 . . . . 5 —

Memoria (L'arte della) — *vedi* Arte.

Mercedi — *vedi* Paga giornaliera.

Merciologia, ad uso delle scuole e degli agenti di commercio, di O. Luxardo, pag. XII-452. . . . . 4 —

Meridiane — *vedi* Gnomonica.

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. Gorini, 2ª ed., p. II-196, con 9 inc. . 2 —

Metallizzazione — *v.* Galvanizz.— Galvanoplastica — Galvanostegia.

Metallocromia. Colorazione e decorazione chimica ed elettrica dei metalli, bronzatura, ossidazione, preservazione e pulitura, dell'Ing. I. Ghersi, pag. VIII-192. . . . . 2 —

Metallurgia — *vedi* Coltivazione delle miniere — Fonditore — Leghe metalliche — Siderurgia — Tempera e cementazione.

Meteorologia generale, del Dott. L. De Marchi, pag. VI-156, con 8 tavole colorate. 1 50

vedi anche — Climatologia — Igroscopi.

Metrica dei greci e dei romani, di L. Müller, 2ª edizione italiana confrontata colla 2ª tedesca ed annotata dal Dott. Giuseppe Clerico, pag. XVI-186. . . . . 1 50

Metrica italiana — *vedi* Ritmica e metrica italiana.

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale,** coll'indice alfabetico di tutti i pesi misure, monete, ecc., dell'Ing. A. Tacchini, pag. XX-482 . . . . 6 50

...zzeria (Manuale pratico della) e dei vari sistemi della co-...nia parziaria in Italia, d. Prof. A. Rabbeno, p. VIII-196 1 50

...gia *vedi* Funghi mangerecci — Malattie crittogamiche — Tar-...e funghi.

...iologia. Perchè e come dobbiamo difenderci dai mi-... Malattie infettive, Disinfezioni, Profilassi, del Dott. ...zini, pag. VIII-142 . . . . 2 —

... — *vedi* Anatomia microscopica — Animali parassiti — ... — Batteriologia — Prostitologia — Tecnica prosti-...

Micr... (Il), Guida elementare alle osservazioni di Micro... del Prof. Camillo Acqua, p. XII-226, 81 inc. 1 50

Mineral... generale, del Prof. L. Bombicci, 2ª ediz. riveduta, ...g. XVI-190, con 183 inc. e 3 tavole . . . 1 50

Mineralogi... descrittiva, del Prof. L. Bombicci, 2ª edizione, di ...V-300, con 119 incisioni. . . . . 3 —

Miniere (Col...one delle), di S. Bertolio, 2ª ediz. rifatta del Ma... Arte Min. „ di Zoppetti, p. VIII-284 . 2 50

Miniere di zolfo — ... Zolfo.

Misurazione delle b... ... *vedi* Enologia.

L. c.

L. c.

legislazione mortuaria „ di F. DELL'ACQUA, p. VIII-136 . 2 —

Mosti (Densità dei), **dei vini e degli spiriti ed i problemi che ne dipendono,** ad uso degli enochimici, degli enotecnici e dei distillatori, di E. CILLIS, di pag. XVI-230, con 11 figure e 46 tavole . . . . 2 —

Musei — *vedi* Amatore oggetti d'arte e curiosità — Amatore maioliche e porcellane — Armi antiche — Pittura — Scoltura.

Musei industriali — *vedi* Industrie Piccole.

Mutuo soccorso — *vedi* Società mutuo soccorso.

Napoleone I°, di L. CAPPELLETTI, 23 fotoinc., p. XX-272 . 2 50

Naturalista preparatore (Il), del Dott. R. GESTRO, 3ª edizione riveduta ed aumentata del *Manuale dell'Imbalsamatore*, di pag. XVI-168, con 42 incisioni . . . . . . 2 —

Naturalista viaggiatore, del Prof. A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni . . . . . 2 —

Nautica stimata o Navigazione piana di F. TAMI. (In lav.).

Neurotteri — *vedi* Imenotteri.

Nichelatura — *vedi* Galvanostegia.

Notaio (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. GARETTI, 4ª ediz. riveduta e ampliata, pag. VIII-380 . . 3 50

Numeri — *vedi* Teoria dei numeri.

Numismatica, del Dott. S. AMBROSOLI, 2ª edizione accresciuta, di pag. XV-250, con 120 fotoincisioni e 4 tavole . 1 50

Nuotatore (Manuale del), del Prof. P. ABBO, di pag. XII-148, con 97 incisioni 2 50

Nutrizione del bambino. Allattam. naturale ed artificiale, del Dott. L. COLOMBO, pag. XX-228, con 12 incisioni. . 2 50

Occultismo — *vedi* Magnet. e ipnotismo — Spiritismo — Telepatia.

Oculistica — *vedi* Igiene della vista — Ottica.

Odontologia — *vedi* Igiene della bocca.

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni di G. GORINI, 2ª edizione completamente rifatta dal Dott. G. FABRIS, di pag. VIII-214, con 7 incisioni . . . . . . 2 —

Olivo ed olio. Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio, del Prof. A. ALOI, 4ª edizione, di pag. XVI-361, con 45 incisioni. . . . . . . 3 —

Omero, di W. GLADSTONE, traduzione di R. PALUMBO e C. FIORILLI, di pag. XII-196 . . . . 1 50

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici di G. BELLUOMINI, 5ª ediz. aumentata, di pag. XVI-262 . . . 2 —

L. c.

Operazioni doganali — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.

Oratoria — *vedi* Arte del dire — Rettorica — Stilistica.

Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pap. VIII-310 . . . . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-376 . . . . 3 —

Ordinamento giudiziario — *vedi* Leggi sull'.

Oreficieria — *vedi* Gioielleria — Leghe metalliche — Metalli preziosi — Saggiatore.

Organoterapia, di E. REBUSCHINI, pag. VIII-432 . . . . 3 50

Oriente antico — *vedi* Storia antica.

Ornatista (Manuale dell'), dell'Arch. A. MELANI. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private. XXIV tavole in colori per miniatori, calligrafi, pittori di insegne, ricamatori, incisori, disegnatori di caratteri, ecc., I^a serie, in-8 . . . . . 4 50

Orologeria moderna, dell'Ing. GARUFFA, di pag. VIII-302, con 276 incisioni . . . . 5 —

— *vedi anche* Gnomonica.

Orologi artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.

Orologi solari — *vedi* Gnomonica.

Orticoltura del Prof. D. TAMARO, 2ª edizione rifatta, di pagine XVI-576, con 110 incisioni 4 50

Ortocromatismo — *vedi* Fotografia.

Ortofrenia (Manuale di), per l'educazione dei fanciulli frenastenici o deficienti (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.), del Prof. P. PARISE, di pag. XII-231 . . . . 2 —

Ortotteri — *vedi* Imenotteri ecc.

Ossidazione — *vedi* Metallocromia.

Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. CARAZZI, con 13 fototipie, di pag. VIII-202 . . . . 2 50

Ottica, di E. GELCICH, pag. XVI-576, con 216 incis. e 1 tav. 6 —

Ottone — *vedi* Leghe metalliche.

Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. NEGRIN, di pag. 222. . . . 2 50

Paleoetnologia, del Prof. J. REGAZZONI, di pag. XI-252, con 10 incisioni 1 50

Paleografia, di E. M. THOMPSON, traduzione dall'inglese, con aggiunte e note del Prof. G. FUMAGALLI, 2ª edizione rifatta, di pag. XII-178, con 30 inc. e 6 tav,. . . . . . 2 —

Paleontologia (Compendio di), del Prof. P. VINASSA DE REGNY, di pag. XVI-512, con 356 figure intercalate . . 5 50

L. c.

Panificazione razionale, di POMPILIO, pag. IV-126 . . . 2 —
Parafulmini — *vedi* Elettricità — Fulmini.
Patate di gran reddito (Coltivazione delle) **e loro pratica utilità.** Fabbricazione della fecola. Fecole dell'amido di mais, di grano e di riso, di N. ADUCCI. (In lavoro).
Pazzia — *vedi* Psichiatra — Grafologia.
Pediatria — *vedi* Nutrizione del bambino — Ortopedia — Terapia malattie infanzia.
Pellagra (La), Storia, eziologia, patogenesi, profilassi. di G. ANTONINI, di pag. VIII-166 con 2 tav. . . . . 2 —
Pelle — *vedi* Igiene della.
Pelli — *vedi* Concia delle pelli.
Pensioni — *vedi* Società di mutuo soccorso.
Pepe -- Prodotti agricoli.
Perfosfati — *vedi* Fosfati — Concimi — Chimica agraria.
Perito — *vedi* Codice nel perito misuratore — Ingegneria legale.
Pesci — *vedi* Ittiologia — Ostricoitura — Piscicoltura.
Pesi e misure — *vedi* Metrologia — Misure e pesi inglesi — Monete — Strumenti metrici — Tecnologia monetaria.
Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. BELLUOMINI, di pag. XXIV-248. . . . . 3 50
Planeti — *vedi* Astron. — Cosmogr. — Gravit. — Spettroscopio.
Pianista (Manuale del), di L. MASTRIGLI, pag. XVI-112 . 2 —
Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie di varietà, di A. PUCCI, 2ª edizione, pag. VIII-214, con 117 incisioni . 2 50
Piante industriali, coltivazione, raccolta, preparazione, di G. GORINI, nuova edizione, di pag. II-144. . . . . . 2 —
Piante tessili (Coltivazione ed industrie delle), propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII,-476, con 72 incisioni . . . . 5 —
Piccole industrie — *vedi* Industrie.
Pietre artificiali — *vedi* Imitazioni.
Pietre preziose, classificazione, valore, arte del giojelliere, di G. GORINI, 2ª edizione, di pag. 138, con 12 incisioni. 2 —
Pirotecnia moderna, di F. DI MAIO, 111 inc., p. VIII-150. 2 50
Piscicoltura (d'acqua dolce), del Dott. E. BETTONI, di pagine VIII-318, con 85 incisioni . . . . 3 —
Pittura ad olio, acquarello e miniatura (Manuale per dilettante di), paesaggio, figura e fiori, di G. RONCHETTI, pag. XVI-230, 29 incis. e 24 Tav. in zincot. e cromolit. . 3 50
Pittura italiana antica e moderna, dell'Arch. A. MELANI,

L. c.

2ª edizione completamente rifatta, di pag. XXX-430 con 23 incisioni intercalate e 137 tavole 7 50

Plastica — *vedi* Imitazioni.

Pollicoltura, del March. G. TREVISANI, 4ª edizione, di pagine XVI-216, con 82 incisioni 2 50

Polveri piriche — *vedi* Esplodenti — Pirotecnia.

Pomologia, descrizione delle migliori varietà di Albicocchi, Ciliegi, Meli, Peri, Peschi, del Dott. G. MOLON, con 86 incisioni e 12 tavole colorate, di pag. XXXII-717 . . . 8 50

Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. DEL LUPO, pag. VI-132, e 34 incisioni . . 2 —

Poponi — *vedi* Frutta minori.

Porcellane — *vedi* Maioliche — Ricettario domestico.

Porco (Allevamento del) — *vedi* Maiale.

Porti di mare, (I) dell'Ing. BASTIANI FLORIO. (In lavoro).

Posologia — *vedi* Impiego ipodermico.

Posta. Manuale Postale di A. PALOMBI. Notizie storiche sulle Poste d'Italia, organizzazione, legislazione, posta militare, unione postale universale, con una appendice contenente le norme relative ad alcuni servizi accessori della posta, di pag. XXX-309 . . . . 3 —

Prato (Il), del Prof. G. CANTONI, di pag. 146, con 13 inc. 2 —

Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresa la Valsassina ed i Passi alla Valtellina ed alla Valcamonica, colla prefazione di A. STOPPANI, e cenni geologici di A. TARAMELLI, 3ª edizione rifatta per cura della Sezione di Bergamo del C. A. I., con 15 tavole, due carte topografiche, ed una carta e profilo geologico. Un volume di pag. 290 e un vol. colle carte topografiche in busta . . 6 50

Pregiudizi — *vedi* Errori e pregiudizi.

Previdenza — *vedi* Assicuraz. — Cooperaz. — Società di M. S.

Privative industriali — *vedi* Leggi sulle — Ingegneria legale.

Problemi di Geometria elementare, dell'Ing. I. GHERSI, (Metodi facili per risolverli), con circa 200 problemi risolti, e 119 incisioni, di pag. XII-160 , ... 1 50

Procedura civile e procedura penale — *vedi* Codice.

Procedura privilegiata fiscale per la riscossione delle imposte dirette — *vedi* Esattore.

Processi fotomeccanici (I moderni). Fotocollografia, fototipografia, fotocalcografia, fotomodellatura, tricromia, del Prof. R. NAMIAS, p. VIII-316, 53 fig., 41 illustr. e 9 tav. 3 50

Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), del Cav. A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zuc-

L. c.

Ragioneria delle cooperative di consumo (Manuale di), del Rag. G. ROTA, di pag. XV-408 . . . . 3 —
Ragioneria industriale, del Prof. Rag. ORESTE BERGAMASCHI, di pag. VII-280 e molti moduli . . . . 3 —
Ragioniere (Prontuario del). (Manuale di calcolazioni mercantili e bancarie), di E. GAGLIARDI, pag. XII-603 . . 6 50
Ramatura — *vedi* Galvanostegia.
Rebus — *vedi* Enimmistica.
Reclami ferroviarii — *vedi* Trasporti e tariffe.
Registro e Bollo — *vedi* Leggi sulle tasse di.
Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, dell'Ing. G. POZZI, di pag. XV-238, con 182 incisioni e 1 tavola. . . . . , ... 2 50
Religioni e lingue dell'India inglese, di R. CUST, tradotto dal Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-124 . . . . . 1 50
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di P. GALLIZIA, pag. X-336, con 236 inc. e 2 tavole. . . . 5 50
Responsabilità — *vedi* Ingegneria legale.
Rettili — *vedi* Zoologia.
Rettorica, ad uso delle Scuole, di F. CAPELLO, p. VI-122. 1 50
Ribes — *vedi* Frutta minori.
Ricami — *vedi* Biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Piccole industrie — Ricettario domestico — Trine.
Ricchezza mobile, dell'Avv. E. BRUNI, pag. VIII-218 . . 1 50
Ricettario domestico, dell'Ing. I. GHERSI. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibili e illuminazione. Detersione e lavatura. Smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta. Igiene e medicina. Mastici e plastica. Colle e gomme. Vernici ed encaustici. Metalli. Vetrerie, di pag. 550 con 2340 consigli pratici e ricette accuratamente scelte. . 5 50
Ricettario industriale, dell'Ing. I. GHERSI. Procedimenti utili nelle arti, industrie e mestieri, caratteri; saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali d'uso comune; colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno, fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro; metalli, bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera, leghe; filtrazione; materiali impermeabili, incombustibili, artificiali; cascami, olii, saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, imbianchimento; agricoltura, elettricità; 2ª edizione rifatta e

L. c.

aumentata, di pag. VII-704, con 27 inc. e 2886 ricette . . 6 50

Ricettario fotografico. Terza edizione riveduta e notevolmente ampliata di nuove formole e procedimenti, del Dott. L. SASSI, di pag. XXIV-229 . . . . 2 —

Rilievi — *vedi* Cartografia — Compens. errori — Telemetria.

Risorgimento italiano (Storia del) **1814-1870**, con l'aggiunta di un sommario degli eventi posteriori, del Prof. F. BERTOLINI, 2ª ediz,, di pag. VIII-208 . . . . 1 50

Ristauratore dei dipinti, del Conte G. SECCO-SUARDO, 2 volumi, di pag. XVI-269, XII-362, con 47 incisioni. . . . 6 —

Ritmica e metrica razionale italiana, del Prof. ROCCO MURARI, di pag. XVI-216. . . . . 1 50

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), del Prof. Dott. GIAN PAOLO SOLERIO, di pag. IV-176. . . . . 1 50

Roma antica — *vedi* Mitologia — Monete — Topografia.

Röntgen (I raggi di) **e le loro pratiche applicazioni,** di ITALO TONTA, pag. VIII-160, con 65 incis e 14 tavole . 2 50

Rhum — *vedi* Liquorista.

Saggiatore (Manuale del), di F. BUTTARI, di pag. VIII-245, con 28 incisioni 2 50

Sale (Il) **e le Saline,** di A. DE GASPARIS. (Processi industriali, usi del sale, prodotti chimici, industria manifatturiera, industria agraria, il sale nell'economia pubblica e nella legislazione), di pag. VIII-358, con 24 incisioni . 3 50

Salumiere — *vedi* Majale.

Sanatorii — *vedi* Tisici e sanatorii.

Sanità e sicurezza pubblica. — Vedi *Leggi sulla.*

Sanscrito (Avviamento allo studio del), del Prof. F. G. FUMI, 2ª edizione rifatta, di pag. XII-254 . . . . 3 —

Saponi (L'industria saponiera), con alcuni cenni sull'industria della soda e della potassa. Materia prima e fabbricazione in generale. Guida pratica dell'Ing. E. MARAZZA, di pag. VII-410, con 111 figure e molte tabelle . . . . 6 —

Sarta da donna — *vedi* Abiti — Biancheria.

Scacchi (Manuale del giuochi degli), di A. SEGHIERI, 2ª ediz. ampliato da E, ORSINI, con una appendice alla sezione delle partite giuocate e una nuova raccolta di 52 problemi di autori ital., di pag. VI-310, con 191 incis. . 3 —

Scaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, di R. FERRINI, 2ª ediz., di pag. VIII-300, con 98 incisioni.. . 3 —

Scenografia (La). Cenni storici dall'evo classico ai nostri giorni, di G. FERRARI, di pag. XXIV-327, con 16 incisioni nel testo, 160 tavole e 5 tricromie . . . . . 12 —

L c

Scherma italiana di J. GELLI, 2ª ediz., di pagine VI-251, con 108 figure 2 50

Sciarade — *vedi* Enimmistica.

Scienza delle finanze, di T. CARNEVALI, pag. IV-140 . . 1 50

Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Prof. D. MAFFIOLI, 2ª ediz., di pag. VIII-203 . . . . 1 50

Sconti — *vedi* Interesse e sconto.

Scoperte geografiche — *vedi* Cronologia.

Scultura italiana antica e moderna (Manuale di), dell'Arch. A. MELANI, 2ª edizione rifatta con 24 incisioni nel testo e 100 tavole, di pag. XVII-248 . . . . 5 —

Scuole industriali — *vedi* Industrie (Piccole).

Segretario comunale — *vedi* Esattore.

Selvicoltura, di A. SANTILLI, di pag. VIII-220, e 46 inc. . 2 —

Semeiotica. Breve compendio dei metodi fisici di esame degli infermi, di U. GABBI, di pag. XVI-216, con 11 inc. 2 50

Sericoltura — *vedi* Bachi da seta — Filatura — Gelsicultura — Industria della seta — Tintura della seta.

Servitù — *vedi* Ingegneria legale.

Shakespeare, di DOWDEN, trad. di A. BALZANI, p. XII-242 1 50

Seta (Industria della), del Prof. L. GABBA, 2ª ed., p. IV-208 2 —

Seta artificiale — *vedi* Imitazioni.

Sicurezza pubblica — *vedi* Leggi di sanità.

Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura dell'Ing. E. GARUFFA, di pag. IV-368, con 220 incisioni 5 50

Sieroterapia, del Dott. E. REBUSCHINI, di pag. VIII-424 . 3 —

Sigle epigrafiche — *vedi* Dizionario di abbreviature.

Sintassi francese, del Prof. D. RODARI (In lavoro).

Sismologia, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50

Smacchiature — *vedi* Ricettario domestico.

Smalti — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Fotosmaltografia — Ricettario industr.

Soccorsi d'urgenza, del Dott. C. CALLIANO, 4ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XLVI-352, con 6 tav. litogr. 3 —

Socialismo, di G. BIRAGHI, di pag. XV-285. . . . . . 3 —

Società di mutuo soccorso. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte, del Dott. G. GARDENGHI, di pag. VI-152. . . . . 1 50

Società industriali italiane per azioni, del Dott. F. PICCINELLI, di pag. XXXVI-534. 5

L. c.

Sociologia generale (Elementi di), del Dott. EMILIO MORSELLI, di pag. XII-172. . . . . 1 50

Sordomuto (Il) **e la sua istruzione.** Manuale per gli allievi e le allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, del Prof. F. FORNARI, di pag. VIII-232, coe 11 inc. 2 —

— *vedi anche* Ortofrenia.

Sostanze alimentari. — *vedi* Conservazione delle.

Specchi (La fabbricazione degli) **e la decorazione del vetro e cristallo,** del Professor R. NAMIAS, di pagine XII-156, con 14 incisioni . . . . 2 —

Spettrofotometria (Manuale di), di G. GALLERANI. (In lavoro).

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. PROCTOR, traduzione con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-179, con 71 incis. e una carta di spettri 1 50

Spiritismo, di A. PAPPALARDO, Seconda edizione, con 9 tavole, di pag. XVI-216 . . . . 2 —

— *vedi anche* Magnetismo — Telepatia.

Spirito di vino — *vedi* Alcool — Cognac — Distillaz. — Liquorista.

Stagno (Vasellame di) — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Leghe metalliche.

Statica — *vedi* Metrologia — Strumenti metrici.

Statistica, del Pr. F. VIRGILII, 3ª ed., rifatta pag. XIX-225 1 50

Stearineria (L'industria stearica). Manuale pratico dell'Ing. E. MARAZZA, di pagine XI-284, con 70 incisioni e molte tabelle . . . . 5 —

Stelle — *vedi* Astronomia — Cosmografia — Gravitazione — Spettroscopio.

Stemmi — *vedi* Araldica — Numismatica — Vocabol. araldico.

Stenografia, di G. GIORGETTI, (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), 2ª ediz., di pag. IV-241. . . . . 3 —

Stenografia (Guida per lo studio della) sistema Gabelsberger-Noe, compilata in 35 lezioni da A. NICOLETTI, 3ª ed. riveduta, di pag. VIII-160. . . . . 1 50

Stenografia. Esercizi graduali di lettura e di scrittura stenografica (sistema Gabelsberger-Noe), con 3 novelle del Prof. A. NICOLETTI, 2ª ediz., di pag. VIII-160 . . . . 1 50

— *vedi anche* Dizionario stenografico.

Stenografo pratico (Lo) di L. CRISTOFOLI, di pag. XII-131 1 50

Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alla loro costruzione in carta, del Prof. A. RIVELLI, di pag. 90, con 92 incisioni e 41 tavole. . . . . 2 —

L. c.

Stilistica, del Prof. F. CAPELLO, di pag. XII-164. . . . 1 50

Stimatore d'arte — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di maioliche e porcellane — Armi antiche.

Storia antica. Vol. I. *L'Oriente Antico*, del Prof. I. GENTILE, di pag. XII-232 . . . . 1 50

Vol. II. *La Grecia*, di G. TONIAZZO, pag. IV-216 . . 1 50

Storia dell'Arte, del Dott. G. CAROTTI. (In lavoro).

Storia dell'arte militare antica e moderna, del Cap. V. ROSSETTO, con 17 tav. illustr., di pag. VIII-504. . . . 5 50

— *vedi anche* Armi antiche.

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole sinottiche, del Prof. V. CASAGRANDI, 3ª edizione, con nuove correzioni ed aggiunte, di pag. VIII-254 . . . . 1 50

Storia della ginnastica. — Vedi *Ginnastica*.

Storia d'Italia (Breve), di P. ORSI, 2ª ed. rived., p. XII-276 . 1 50

Storia di Francia, dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-424, con tabelle cronologiche e genealogiche . . . . 3 —

Storia ital. (Man. di), di C. CANTÙ, pag. IV-160 (esaurita).

Storia d'Inghilterra dai tempi più remoti ai giorni nostri, del Prof. G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-367 . . . . . 3 —

Storia della musica, del Dott. UNTERSTEINER, 2ª edizione ampliata, di pag. XII-330 . . . . 3 —

Strumentazione, per E. PROUT versione italiana con note di V. RICCI, 2ª ediz. rived., di p. XVI-214, 95 incis. . . . 2 50

Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI, di pag. X-235. . . . . 2 50

Strumenti metrici (Principî di statica e loro applicazione alla teoria e costruzione degli), dell'Ing. E. BAGNOLI, di pag. VIII-252, con 192 incisioni 3 50

Stufe — *vedi* Scaldamento.

Suono — *vedi* Luce e suono.

Succedanei — *vedi* Ricettario industriale — Imitazioni.

Sughero — *vedi* Imitazioni e succedanei.

Surrogati — *vedi* Ricettario industriale — Imitazioni.

Sussidi — *vedi* Società di mutuo soccorso.

Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di pag. IV-176, con 6 inc. 2 —

Tabacchiere artistiche — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.

Tacheometria — *vedi* Celerimensura — Telemetria — Topografia — Triangolazioni.

Tamarindo — *vedi* Prodotti agricoli.

Tappezzerie — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Tariffe ferroviarie — *vedi* Codice dog. — Trasporti e tariffe.

L. c.

Tartufi (I) **ed i funghi,** loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura, di FOLCO BRUNI, di pag. VIII-184 2 —

Tasse di registro, bollo, ecc. — *vedi* Codice di bollo — Esattore — Imposte — Leggi Tasse Reg. e Bollo — Notaio — Ricch. mob.

Tassidermista — *vedi* Imbalsamatare — Naturalista viaggiatore.

Tè — *vedi* Prodotti agricoli.

Teatro — *vedi* Letteratura drammatica — Codice del teatro.

Tecnica microscopica — *vedi* Anatomia microscopica.

Tavole d'alligazione per l'oro e per l'argento con numerosi es. pratici per il loro uso, F. BUTTARI, p. XII-220. 2 50

Tavole logaritmiche — *vedi* Logaritmi.

Tavole schematiche della Divina Commedia di Dante Alighieri, di L. POLACCO, seguite da sei tavole topogr. in cromolit. disegn. dal Maestro G. AGNELLI, pag. X-152 . 3 —

Tecnica protistologica, del Prof. L. MAGGI, pag. XVI-318 3 —

Tecnologia — *vedi* Dizionario tecnico.

Tecnologia meccanica — *vedi* Modellatore meccanico.

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XVI-191 . . . . 2 —

Telefono, di D. V. PICCOLI, di p. IV-120, con 38 incis., L. 2. (Esaurito, è in lav. la 2ª ediz. complet. rifatta da G. MOTTA).

Telegrafia, del Prof. R. FERRINI, 2ª edizione corretta ed accresciuta, di pag. VIII-315, con 104 incisioni . . . . 2 —

Telegrafia senza fili. (In lavoro).

Telemetria, misura delle distanze in guerra, del Cap. G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie . . . . 2 —

Telepatia (Trasmissione del pensiero), di A. PAPPALARDO, di pag. XVI-329 . . . . 2 50

— *vedi anche* Magnetismo — Ipnotismo — Spiritismo.

Tempera e cementazione, dell'Ingegner FADDA, di pagine VIII-108, con 20 incisioni. . . . . 2 —

Teoria dei numeri (Primi elementi della), per il Prof. U. SCARPIS, di pag. VIII-152 . . . . 1 50

Teoria delle ombre, con un cenno sul Chiaroscuro e sul colore dei corpi, del Prof. E. BONCI, di pag. VIII-164, con 36 tavole e 62 figure . . . . 2 —

Terapia delle malattie dell'infanzia, del Dott. G. CATTANEO, di pag. XII-506 . . . . 4 —

Termodinamica, Prof. G. CATTANEO, pag. X-196, 4 fig. . 1 50

Terremoti — *vedi* Sismologia — Vulcanismo.

Terreni — *vedi* Chimica agraria — Concimi — Humus.

Tessitore (Manuale del), del Prof. P. PINCHETTI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XVI-312, con illustrazioni 3 50

L. c.

Tessuti di lana e di cotone (Analisi e fabbricazione dei), di O. GIUDICI. (In lavoro).

Testamenti (Manuali dei), per cura del Dott. G. SERINA, di pag. VI-238 . . . . 2 50

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. M. CAMPERIO, di pag. 180 . 2 50

Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 3ª edizione, di pagine X-279, con 14 incisioni. . . . . 4 —

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-432 . . . . 5 —

Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. - Compositori, Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280. . . . . 2 50

Tipografia (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di p. VIII-271, corredato di figure e di modelli. . . . . . . , . . . 2 50

— *vedi anche* Vocabolario tipografico.

Tisici e i Sanatorii (La cura razionale dei), del Dott. A. ZUBIANI, prefaz. del Prof. B. SILVA, p. XLI-240, 4 incis. 2 —

Titoli di rendita — *vedi* Debito pubblico — Valori pubblici.

Topografia e rilievi — *vedi* Cartografia — Catasto — Celerimensura — Compensazione errori — Curve — Disegno topografico — Estimo terreni — Estimo rurale — Fotogrammetria — Geometria pratica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni.

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di pag. VIII-436, con 7 tavole . . . . , ... 4 50

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate. arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, 2ª edizione, di pag. XII-175 . . . . . . 2 —

Traduttore tedesco (Il), compendio delle principali difficoltà grammaticali della Lingua Tedesca. del Prof. R. MINUTTI, di pag. XVI-224. . . . . 1 50

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe vigenti, di A. BIANCHI 2ª edizione rifatta. di pagine XVI-208. . 2 —

Travi metallici composti — Vedi *Momenti resistenti.*

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. JACOANGELI. Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pag. XIV-340, con 32

L. c.

incisioni, 4 quadri degli elementi geodetici, 32 modelli pei calcoli trigonometrici e tavole ausiliarie 7 50

Trigonometria — *vedi* Celerimensura — Esercizi Geometria metrica — Geometria metrica — Logaritmi.

Trigonometria della sfera — *vedi* Geometria e trigonom. della.

Trine (Le) **a fuselli in Italia.** Loro origine discussione, confronti, cenni bibliografici, analisi, divisione, istruzioni tecnico-pratiche con 200 illustrazioni intercalate nel testo di GIACINTA ROMANELLI-MARONE, di pag. VIII-331 . . 4 50

Tubercolosi — *vedi* Tisici.

Uccelli canori (I nostri migliori); loro caratteri e costumi. Modo di abituarli e conservarli in schiavitù. Cura delle loro infermità. Maniera per ottenere la riproduzione del Canarino, di L. UNTERSTEINER, di pag. XII-175 . . . 2 —

Ufficiale (Manuale per l') del Regio Esercito italiano, di U. MORINI, di pag. XX-388 . . . . 3 50

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione. Problemi dell'Ing. G. BERTOLINI, pag. X-124. . . . . 2 50

Usciere — *vedi* Conciliatore.

Uva spina — *vedi* Frutta minori.

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, del Dott. D. TAMARO, 3ª edizione, di pag. XVI-278, con tavole colorate, 7 fototipie e 57 incisioni . . . . 4 —

Valli lombarde — *vedi* Dizionario alpino — Prealpi Bergamasche.

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei), e per le operazioni di Borsa, del D. F. PICCINELLI, 2ª edizione rifatta e accresciuta, di pag. XXIV-902 . . . . 7 50

Valutazioni — *vedi* Prontuario del ragioniere.

Vasellame antico — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità.

Veleni ed avvelenamenti, del Dott. C. FERRARIS, di pag. XVI-208, con 20 incisioni. 2 50

Velocipedi — *vedi* Ciclista.

Ventagli artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Ventilazione — *vedi* Scaldamento.

Verbi greci anomali (I), del Prof. P. SPAGNOTTI, secondo le Grammatiche di CURTIUS e INAMA, pag. XXIV-107 . 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. F. PAVANELLO, con indice alfabetico di dette forme, di pag. VI-215 . . . . 1 50

Vermouth — *vedi* Liquorista.

Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa. ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. UGO FORNARI, di pag. VIII-262 . . . . 2 —

Vetri artistici — *vedi* Amatore oggetti d'arte — Specchi — Fotosmaltografia.

L. c.

Vetro (Industria del), dell'ing. IOSEPH D'ANGÉLO. In lav.).

Vini bianchi da pasto e Vini mezzo colore (Guida pratica per la fabbricazione, l'affinamento e la conservazione dei), di G. A. PRATO, di pag. XII-276, con 40 inc. . . . . 2 —

Vino (Il), di G. GRASSI-SONCINI, di pag. XVI-152. . . . 2 —

Vino aromatizzato — *vedi* Cognac — Liquorista.

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, 5ª ed. riveduta ed ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XVI-227, con 30 incisioni . . . , ... 2 —

Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), del Dott. S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134 . . . . 1 50

Vocabolario araldico ad uso degli italiani, del Conte G. GUELFI, di pag. VIII-294, con 356 incisioni 3 50

Vocabolario compendioso della lingua russa, del Prof. VOINOVICH, di pag. XVI-238 . . . . , ... 3 —

Vocabolario tipografico, di S. LANDI. (In lavoro).

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell'inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. KERCKHOFFS, di pag. XXX-198 . . . . . . 2 50

Volapük (Dizion. volapük-ital.), Prof. C. MATTEI, p. XX-204. 2 50

Volapük, Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA, TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152. . . . . 2 50

Vulcanismo, del Cap. L. GATTA, di pag. VIII-268 e 28 inc. . 1 50

Zecche — *vedi* Terminologia monetaria.

Zolfo (Le miniere di) di G. CAGNI (In lavoro).

Zoologia, dei Prof. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA:

I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure 1 50

II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni . . . 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), di pag. XVI-200, con 22 incis.. 1 50

Zoonosi, del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227. . 1 50

Zootecnia, del Prof. G. TAMPELINI, p. VIII-297, 52 incis. 2 50

Zucchero (Industria dello):

I. *Coltivazione della barbabietola da zucchero*, dell'Ing. B. R. DEBARBIERI, di pag. XVI-220, con 12 inc.. . 2 50

II. *Commercio, importanza economica e legislazione doganale*, di L. FONTANA-RUSSO, di pag. XII-244 . 2 50

III. *Fabbricazione dello zucchero di barbabietola* dell'Ing. A. TACCANI, di pag. XII-228, con 71 incis . . 3 50

Indice alfabetico per autori dei Manuali Hoepli

(I numeri indicano le pagine).